

線形代数 II 第 12 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} とする。

今回はまず前回に引き続き線形写像に関する便利な諸性質を解説する。その後線形写像の中でも特別な『同型写像』について解説を行う。同型写像とは全単射線形写像のことであるが、これにより『ベクトル空間 V と W が同型である』という概念が定義される。ベクトル空間が同型であるとは、大雑把に言えば“ベクトル空間としては全く同じである”ということを意味している。これにより、ベクトル空間として同じもの、違うものというのが区別できるようになるが、そこで次元という概念が非常に重要な役割を果たすことを述べる。

12.1 線形写像補足

この節では線形写像を扱う上で便利な命題・定理について順に解説する。次の命題は『単射線形写像は一次独立という関係を保存する』ということを主張している (第 11 回講義内小テスト問題 4 参照)。

命題 12.1

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 $f: V \rightarrow W$ を単射線形写像とする。 $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ が V の一次独立な部分集合であるとき、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_k)\}$ も W の一次独立な部分集合である。特に、任意の V の部分空間 U に対して、

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} f(U).$$

となる。

証明. ある $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して、

$$c_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + c_k f(\mathbf{b}_k) = \mathbf{0}$$

となったと仮定する。このとき線形写像の性質より、左辺は $f(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k)$ となるので、

$$c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k \in \text{Ker } f$$

である。ここで f は単射なので、命題 11.7 (2) より $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ であるから、

$$c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

いま $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ は V の一次独立な部分集合なので、このとき $c_1 = \dots = c_k = 0$ 。よって、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_k)\}$ は W の一次独立な部分集合である。

U を V の部分空間とし、 $B \subset U$ を U の基底とすると、基底の定義条件 (b2) より $U = \text{span}_{\mathbb{K}} B$ なので、第 11 回講義資料 p.7 注意 2 で示した等式より、

$$f(U) = f(\text{span}_{\mathbb{K}} B) = \text{span}_{\mathbb{K}} f(B) \quad \text{ただし、} f(B) := \{f(\mathbf{b}) \mid \mathbf{b} \in B\}.$$

よって、 $f(B)$ は $f(U)$ を生成する。さらに、基底の定義条件 (b1) より B は一次独立であるが、上で示したことより、 $f(B)$ も一次独立である。これらより、 $f(B)$ は $f(U)$ の基底である。いま、 f の単射性より、 B の元の個数と $f(B)$ の元の個数は等しいので、 $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} f(U)$ となる。 \square

* e-mail: hoya@shibaura-it.ac.jp

以下は線形写像の像の次元は定義域の次元よりも増えることはないということを主張している。線形写像に単射性を仮定すると次元が減ることもないということを主張しているのが上の命題 12.1 であった。なお、証明は少し複雑に見える部分があるので、『この事実は自然に受け入れられる』という方は一旦証明を飛ばして読んでも良い。

命題 12.2

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 V は有限次元であると仮定する。このとき $f: V \rightarrow W$ を線形写像とすると、

$$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f$$

が成立する。

証明. $\text{Im } f = \{\mathbf{0}\}$ となるとき、 $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 0 = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f$ となって命題は成立するので、以下では $\text{Im } f \neq \{\mathbf{0}\}$ であると仮定して命題を証明する。なお、 $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ のとき、 $V = \{\mathbf{0}\}$ であり、線形写像の性質 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より $\text{Im } f = \{\mathbf{0}\}$ となるので、 $\text{Im } f \neq \{\mathbf{0}\}$ という仮定の下では $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 1$ でもあることに注意する。このとき、(0 個ではない) 有限個の元からなる V の基底 $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ が存在する。第 11 回講義資料 p.7 注意 2 で示した等式より、

$$\text{Im } f = f(\text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}. \quad (12.1)$$

これより、 $\text{Im } f$ は n 個の元で生成されるベクトル空間である。ここで、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ からいくつか (0 個かもしれない) 元を除くことで $\text{Im } f$ の基底が構成できることが証明できれば、

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n \geq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f$$

となることがわかる。よって、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ からいくつか (0 個かもしれない) 元を除くことで $\text{Im } f$ の基底が構成できることを証明すれば良い。

もし $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ が一次独立であったとすると、(12.1) と合わせて $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ は $\text{Im } f$ の基底であることがわかる (一つも元を除く必要は無い)。

次に $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ が一次従属であったとすると、ある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ で $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ であるものが存在して、

$$c_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + c_n f(\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}$$

とできる。ここで、 $c_k \neq 0$ であったとすると、上式を変形して

$$f(\mathbf{b}_k) = -\frac{1}{c_k}(c_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + c_{k-1} f(\mathbf{b}_{k-1}) + c_{k+1} f(\mathbf{b}_{k+1}) + \dots + c_n f(\mathbf{b}_n))$$

となるので、 $f(\mathbf{b}_k)$ は $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} \setminus \{f(\mathbf{b}_k)\}$ の一次結合で書ける。これより、

$$\text{Im } f = \text{span}_{\mathbb{K}}\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} = \text{span}_{\mathbb{K}}(\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} \setminus \{f(\mathbf{b}_k)\})$$

である。つまり、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ から $f(\mathbf{b}_k)$ を除いたものも $\text{Im } f$ を生成する。よって、もし $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} \setminus \{f(\mathbf{b}_k)\}$ が一次独立であれば、 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} \setminus \{f(\mathbf{b}_k)\}$ は $\text{Im } f$ の基底である。もし $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\} \setminus \{f(\mathbf{b}_k)\}$ が一次従属であれば上の議論を繰り返すことにより、この集合から『 $\text{Im } f$ を生成する』という条件を保ったままさらに元を除くことができる。 $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ は有限集合なので、この議論は何度か繰り返すと必ず一次独立な集合が得られて終了する ($\text{Im } f \neq \{\mathbf{0}\}$ なので $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ は少なくとも 1 つは $\mathbf{0}$ でない元を含むため、この議論の繰り返して結局全ての元が取り除かれるということはない)。一次独立な集合が得られたとき、得られた集合は一次独立かつ $\text{Im } f$ を生成するので $\text{Im } f$ の基底である。よって示すべきことは示された。□

注意 1. $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ のときは任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に対し、 $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty \geq n$ であるので、主張が自明となるため命題 12.2 では V が有限次元であるという仮定を付けた。ただ実際には“ ∞ ”の間にも大小関係はあ

り、濃度という言葉で表されるが(例えば「自然数の濃度は実数の濃度よりも小さい」等)、本講義では簡単のため無限の間の比較は行わないことにする。無限の間の大小の比較を行うことにすると、命題 12.2 は V が無限次元の場合も成立して非自明な主張を与える。

注意 2. 命題 12.2 の証明と全く同じ議論により、以下が証明される：

V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 n を正の整数として $v_1, \dots, v_n \in V$ を V の n 個の元とする。このとき、

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_n\} \leq n$$

である。

系 12.3

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする。このとき、以下が成立する。

- (1) $\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき、 f は全射にはなりえない。
- (2) $\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき、 f は単射にはなりえない。

証明.

(1) 仮定より $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ である(注意 1 で述べたように無限の間の大きさの比較は行わないので、 $\infty < x$ となる $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ は存在しないことに注意する。なお、無限の間の比較を行うことにしてもこの命題の主張は成立する)。よって、命題 12.2 より、

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f \leq \dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$$

となるので、 $\text{Im } f \subsetneq W$ となる。よって、 f は全射ではない。

(2) f が単射であると仮定すると、命題 12.1 で $U = V$ としたものより、

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f = \dim_{\mathbb{K}} f(V) = \dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$$

となる。一方、 $\text{Im } f \subset W$ なので、 $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f \leq \dim_{\mathbb{K}} W$ であり(第 10 回講義資料定理 10.9 (2) 参照)、これは上の不等式に矛盾する。よって、 f は単射ではない。 \square

例 1. $\dim_{\mathbb{K}} \text{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{K}) = 6, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^8 = 8$ より、系 12.3 (1) から、全射線形写像 $f: \text{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^8$ は存在しない。

例 2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty, \dim_{\mathbb{K}} \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$ より、系 12.3 (2) から、単射線形写像 $f: \mathbb{K}[x] \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ は存在しない。

次は線形写像を構成する上で便利な命題である：

命題 12.4

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 $B \subset V$ を V の基底とする。各 $\mathbf{b} \in B$ に対し、 W の元 $w_{\mathbf{b}}$ を任意に定めると ($\mathbf{b} \neq \mathbf{b}'$ に対して $w_{\mathbf{b}} = w_{\mathbf{b}'}$ となることがあっても良い)、線形写像 $F: V \rightarrow W$ であって、全ての $\mathbf{b} \in B$ に対し、

$$F(\mathbf{b}) = w_{\mathbf{b}}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する。とくに、 $f: V \rightarrow W, g: V \rightarrow W$ を V から W への 2 つの線形写像としたとき、任意の $\mathbf{b} \in B$ に対し、

$$f(\mathbf{b}) = g(\mathbf{b})$$

が成立するのであれば、線形写像として $f = g$ である。

証明. 基底の定義条件 (b2) より, V の任意の元 \mathbf{v} はある $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in B$ を用いて

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k$$

という形に一通りに書けるが, これに対して

$$c_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + c_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k}$$

を与えるという写像

$$F: V \rightarrow W, c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k \mapsto c_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + c_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k}$$

を考える. F は定義より, 任意の $\mathbf{b} \in B$ に対して $F(\mathbf{b}) = \mathbf{w}_{\mathbf{b}}$ を満たすので, あとはこれが線形写像であることを証明する.

任意の $c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k, c'_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c'_k \mathbf{b}_k \in V, c \in \mathbb{K}$ に対して,

$$\begin{aligned} F((c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) + (c'_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c'_k \mathbf{b}_k)) &= F((c_1 + c'_1) \mathbf{b}_1 + \dots + (c_k + c'_k) \mathbf{b}_k) \\ &= (c_1 + c'_1) \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + (c_k + c'_k) \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k} \\ &= c_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + c_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k} + c'_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + c'_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k} \\ &= F(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) + F(c'_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c'_k \mathbf{b}_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(c(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k)) &= F(cc_1 \mathbf{b}_1 + \dots + cc_k \mathbf{b}_k) \\ &= cc_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + cc_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k} \\ &= c(c_1 \mathbf{w}_{\mathbf{b}_1} + \dots + c_k \mathbf{w}_{\mathbf{b}_k}) \\ &= cF(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) \end{aligned}$$

となるので, F は線形写像である.

最後に, このような線形写像 F がただ 1 つであることを証明するために, 命題 12.4 の「とくに、」以降の主張を証明する (これは基底の各元の行き先が一致するような線形写像は写像として一致するということを主張している). 線形写像としての一致を示すためには, 任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して

$$f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$$

となることを示せばよい. 上で述べたように, V の任意の元 \mathbf{v} は, ある $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in B$ を用いて, $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k$ という形に書けるということに注意すると,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) \\ &= c_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + c_k f(\mathbf{b}_k) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\ &= c_1 g(\mathbf{b}_1) + \dots + c_k g(\mathbf{b}_k) \quad (\text{仮定より}) \\ &= g(c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\ &= g(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

となることがわかる. □

例 3. 3つの多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \mathbb{K}[x]$ を任意に選ぶと (重複があってもよい), 線形写像 $F: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x]$ であって

$$F(\mathbf{e}_1) = f_1(x), \quad F(\mathbf{e}_2) = f_2(x), \quad F(\mathbf{e}_3) = f_3(x),$$

を満たすものが存在する. より具体的には

$$F: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x], \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$$

とすれば, これが線形写像である. 例えば, $f_1(x) = 1 + x^3 + x^5, f_2(x) = f_3(x) = 2x + 3x^3$ とすると,

$$F: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x], \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 + 2(c_2 + c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 3c_3)x^3 + c_1 x^5$$

という線形写像が得られる.

本節の最後に、『 \mathbb{K}^n から \mathbb{K}^m への線形写像は、全て左からある $m \times n$ 行列を掛けるという線形写像として書ける』ということを証明しよう。これも次の単元で非常に重要な内容となる。 \mathbb{K}^n から \mathbb{K}^m への線形写像全体のなす集合を

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) := \{f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \mid f \text{ は線形写像}\}$$

とする。このとき、第 11 回講義資料命題 11.3 で定義した線形写像の和とスカラー倍により、 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ は \mathbb{K} 上のベクトル空間となるのであった (第 11 回講義資料 p.5 注意 1)。

$A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ に対して、 $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を

$$f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

で定まる線形写像とする (第 11 回講義資料例 1 参照)。このとき、以下の定理が成立する：

定理 12.5

m, n を正の整数とする。このとき、任意の線形写像 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ に対し、ある $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ がただ 1 つ存在して、 $f = f_A$ となる。さらに、

$$f_{\bullet}: \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), A \mapsto f_A$$

は全単射線形写像である。

証明. 混乱を避けるために第 i 成分のみが 1 で他の成分が 0 の m 次元単位ベクトルを $\mathbf{e}_i^{(m)} \in \mathbb{K}^m (i = 1, \dots, m)$, 第 j 成分のみが 1 で他の成分が 0 の n 次元単位ベクトルを $\mathbf{e}_j^{(n)} \in \mathbb{K}^n (j = 1, \dots, n)$ と書くことにする。ここで、各 $j = 1, \dots, n$ に対して $f(\mathbf{e}_j^{(n)}) \in \mathbb{K}^m$ なので、ある $a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m$ が存在して、

$$f(\mathbf{e}_j^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

と書ける。これを列ベクトルとして並べて、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

とおく。このとき、 $f_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ であり、

$$f_A(\mathbf{e}_j^{(n)}) = A\mathbf{e}_j^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

である。いま $\{\mathbf{e}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{e}_n^{(n)}\}$ は \mathbb{K}^n の基底なので、(12.2), (12.3), 命題 12.4 より、

$$f = f_A$$

であることがわかる。また、 $f_A = f_{A'}$ となるとき、すべての $j = 1, \dots, n$ に対して、

$$A\mathbf{e}_j^{(n)} = f_A(\mathbf{e}_j^{(n)}) = f_{A'}(\mathbf{e}_j^{(n)}) = A'\mathbf{e}_j^{(n)}$$

となる必要があり、これは A と A' のすべての列が一致しているということに他ならないので、 $f_A = f_{A'}$ のとき、 $A = A'$ である。よって、 $f = f_A$ を満たす A はただ 1 つである。

さらに、任意の $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ に対し、ある $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ が存在して、 $f = f_A$ と書けるということは写像 f_{\bullet} の全射性に他ならず、 $f_A = f_{A'}$ ならば $A = A'$ であるという事実は f_{\bullet} の単射性に他ならない。よって、あとは f_{\bullet} が線形写像であることを示せばよい。つまり、任意の $A, A' \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し、

$$f_{A+A'} = f_A + f_{A'} \quad f_{cA} = cf_A$$

となることを示せばよい。任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し、

$$\begin{aligned} f_{A+A'}(\mathbf{v}) &= (A + A')\mathbf{v} = A\mathbf{v} + A'\mathbf{v} = f_A(\mathbf{v}) + f_{A'}(\mathbf{v}) = (f_A + f_{A'}) (\mathbf{v}) \\ f_{cA}(\mathbf{v}) &= (cA)\mathbf{v} = c(A\mathbf{v}) = cf_A(\mathbf{v}) = (cf_A)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

となるので、示すべきことは全て示された。 □

例 4. \mathbb{K}^3 の成分を入れ替える写像 $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$ は線形写像である (確認は容易なので各自チェックすること)。このとき、

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので ((12.2) 式に対応), これを並べて

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $f = f_A$ である。実際、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

である。

12.2 ベクトル空間の同型

線形写像のうち全単射のものは同型写像と呼ばれる。同型写像で結ばれた 2 つのベクトル空間は同型であるといい、同型なベクトル空間は大雑把に言えば“ベクトル空間としては同じもの”として扱うことができる。この節の最後には実は有限次元ベクトル空間は \mathbb{K}^n というものと必ず同型になってしまうということを証明する (定理 12.9)。

定義 12.6

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする。全単射線形写像 $f: V \rightarrow W$ のことを、(線形) 同型写像という。線形同型写像 $f: V \rightarrow W$ が存在するとき、 V と W は同型であるといい、 $V \simeq W$ と書く。

例 5. 第 11 回講義資料例 8 で解説したように、 P が n 次正則行列であるとき、

$$f_P: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x}$$

は線形同型写像である。また、 $(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$ となるのであった。

例 6. 転置写像

$$T: \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}), A \mapsto {}^t A$$

は線形写像であった (第 11 回講義資料例 4)。これは線形同型写像である。実際、 $t({}^t A) = A$ なので、転置写像

$$T: \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}), A \mapsto {}^t A$$

が上の転置写像の逆写像であり (上の転置写像と定義域と値域が入れ替わっていることに注意), T は全単射である。よって、 $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K}) \simeq \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ である。

例 7. 定理 12.5 で述べた線形写像

$$f_{\bullet}: \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), A \mapsto f_A$$

は全単射線形写像であったので線形同型写像である。つまり、 $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ である。この線形同型写像 f_{\bullet} で移りあうものを同一視することで『 $m \times n$ 行列は線形写像 $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を表すものである』という解釈ができるようになる*1。

命題 12.7

V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 $f: V \rightarrow W$ を線形同型写像とする。このとき、 f の逆写像 $f^{-1}: W \rightarrow V$ も線形同型写像である。

証明. 全単射写像の逆写像が再び全単射写像であることは写像の構成から容易にわかるので、ここでは f^{-1} が線形写像となることを示す。任意の 2 元 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ をとると、

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\mathbf{w} + \mathbf{w}')) &= \mathbf{w} + \mathbf{w}' = f(f^{-1}(\mathbf{w})) + f(f^{-1}(\mathbf{w}')) \\ &= f(f^{-1}(\mathbf{w}) + f^{-1}(\mathbf{w}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる。よって、両辺の f^{-1} による行き先を考えると、

$$f^{-1}(\mathbf{w} + \mathbf{w}') = f^{-1}(\mathbf{w}) + f^{-1}(\mathbf{w}')$$

となる。次に、 $c \in \mathbb{K}, \mathbf{w} \in W$ とすると、

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(c\mathbf{w})) &= c\mathbf{w} = cf(f^{-1}(\mathbf{w})) \\ &= f(cf^{-1}(\mathbf{w})) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる。よって、両辺の f^{-1} による行き先を考えると、

$$f^{-1}(c\mathbf{w}) = cf^{-1}(\mathbf{w})$$

となる。以上より、 f^{-1} は線形写像である。 □

次は与えられた線形写像が同型であるかどうかを判定する際に便利な命題である。線形写像の定義域と値域の次元の一致が事前にわかっているような状況であれば、全射性あるいは単射性のどちらか一方のみから全単射性が従う：

命題 12.8

V と W を \mathbb{K} 上の有限次元ベクトル空間とし、 $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n$ であるとする。 $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする。このとき、以下が成立する。

- (1) f が単射であるならば、 f は線形同型写像である。つまり、このとき全射性は自動的に従う。
- (2) f が全射であるならば、 f は線形同型写像である。つまり、このとき単射性は自動的に従う。

証明.

(1) f は単射なので、命題 12.1 より、

$$\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} f(V) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } f$$

である。ここで $\text{Im } f$ は W の部分空間なので、このとき $\text{Im } f = W$ となる (この議論については、第 10 回本レポート課題問題 4 補足解説参照)。よって、 f は全射でもある。

*1 例えば二次形式を表すものとしても (実対称) 行列は大事な形で現れていたもので、この解釈が唯一の“良い解釈”であるという言い方はできない。ただ、重要な解釈であることは間違いない。

(2) 第 11 回講義資料命題 11.7 より, f の単射性を言うためには $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ であることを言えばよいので, $\mathbf{v} \in \text{Ker } f$ としたとき $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となることを言えばよい. $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ を V の基底とする. このとき, 基底の定義条件 (b2) より, ある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ が存在して,

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

となる. いま $\mathbf{v} \in \text{Ker } f$ なので,

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{v}) = c_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + c_n f(\mathbf{b}_n) \quad (12.4)$$

である. 一方, f の全射性より,

$$W = \text{Im } f = f(\text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$$

となる. いま, W は n 次元なので, 第 10 回講義資料定理 10.9 より, $\{f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)\}$ は一次独立である. よって (12.4) より,

$$c_1 = \dots = c_n = 0$$

となる. つまり, このとき $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である. □

以下の定理は, 有限次元ベクトル空間に対しては『次元が等しいこと』と『同型になること』が同値であるということを主張している. つまり, 『同型であるものを同じと見なすことにすると, n 次元ベクトル空間は本質的には \mathbb{K}^n しかない』ということを主張している. この定理は “一般のベクトル空間も \mathbb{K}^n のように扱える”(これまで \mathbb{K}^n で勉強してきたことを応用できる!) ということを保証している重要な定理である.

定理 12.9

V と W を有限次元ベクトル空間とする. このとき,

$$V \simeq W \iff \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$$

である. 特に, 任意の \mathbb{K} 上の n 次元ベクトル空間 V は \mathbb{K}^n と同型である.

証明.

⇒ 方向: 定義より $V \simeq W$ であるということは, 全単射線形写像 $f: V \rightarrow W$ が存在するということである. 系 12.3 より, $\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき全単射線形写像 $V \rightarrow W$ は存在せず, $\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき単射線形写像 $V \rightarrow W$ は存在しないので, 全単射線形写像 $V \rightarrow W$ が存在するのであれば, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ である.

⇐ 方向: $n = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ とし, $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ を V の基底, $B' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_n\}$ を W の基底とする. このとき, 命題 12.4 より線形写像 $F: V \rightarrow W, G: W \rightarrow V$ であって, 各 $i = 1, \dots, n$ に対し,

$$F(\mathbf{b}_i) = \mathbf{b}'_i \quad G(\mathbf{b}'_i) = \mathbf{b}_i$$

を満たすものが存在する. このとき定義より,

$$G \circ F = \text{id}_V \quad F \circ G = \text{id}_W$$

となる. よって, F, G は全単射であり, 線形同型写像である. よって, $V \simeq W$. □

注意 3. 定理 12.9 の証明で構成したように, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき, V と W の間の線形同型写像は V の基底 B, W の基底 B' をとるごとに作ることができる. $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間の基底の取り方は一般に無限にあるので, このような同型写像も無限に作ることができる.

例 8. 2 次以下の 1 変数多項式全体のなす集合

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ の部分空間となり (第 9 回講義資料例 11), $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = 3$ であった (第 10 回講義資料例 18). これより, 定理 12.9 から,

$$\mathbb{K}^3 \simeq \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$$

である. 具体的に線形同型写像 $\mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ を 2 通り構成しよう. いま,

$$\{1, x, x^2\} \quad \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$$

は共に $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であった (第 10 回講義資料例 18, 例 21). これより,

$$F_1: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 2}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 + c_2x + c_3x^2$$

$$F_2: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 2}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1(-3 + 2x + 2x^2) + c_2(x - x^2) + c_3(-1 + x - x^2)$$

$$= (-3c_1 - c_3) + (2c_1 + c_2 + c_3)x + (2c_1 - c_2 - c_3)x^2$$

はいずれも線形同型写像となる.

最後に線形同型写像と行列の正則性との関係について述べておこう.

命題 12.10

A を \mathbb{K} の元を成分とする $m \times n$ 行列とし, 線形写像

$$f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

を考える. このとき,

$$f_A \text{ が線形同型写像} \iff n = m \text{ かつ } A \text{ が正則行列}$$

である.

証明.

\Leftarrow 方向: 第 11 回講義資料例 8 で既に証明した.

\Rightarrow 方向: まず, $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ が線形同型写像であるとき, $\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^m$ なので, 定理 12.9 より,

$$n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m = m$$

となる. さらに, 第 11 回講義資料例 8 より, f_A が単射のとき $\text{rank } A = n$. n 次正方行列 A が $\text{rank } A = n$ を満たすことは A が正則であることと同値であったので (線形代数 I の内容. 第 1 回本レポート課題解答問題 4 補足解説参照), このとき A は正則である. □

例 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, $\det A = 1 \neq 0$ なので, A は正則であるから, 例 4 の線形写像

$$f_A: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

は線形同型写像である.