線形代数 II 第 13 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回はまず次元定理と呼ばれる線形写像の像と核の次元の関係に関する定理について解説を行う．そしてこの定理を元に，行列のランクについて線形空間論からの新しい解釈を与える．これにより，行列のランクは列基本変形を用いても計算できるということがわかる．

後半では本講義全体の後半部分の肝とも言える『表現行列』について解説を行う (この話題は次回も続く)．これにより，抽象的な線形写像もこれまで勉強してきた行列を用いて具体的に計算ができるようになる．これは線形代数を他の分野に応用するにあたって非常に基本的かつ重要な考え方であるので，しっかりと学んでもらいたい．

13.1 次元定理

定理 13.1(次元定理)

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$f\colon V\to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V=\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Ker} f+\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im} f$$

が成立する．

証明. $\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_s\}$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底，$\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_t\}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする (命題 12.2 より，V が有限次元のとき，$\operatorname{Im} f$ も有限次元であることに注意する)．このとき，特に $\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Ker} f=s, \dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im} f=t$ である．各 $i=1,\dots,t$ に対して $\boldsymbol{w}_i\in\operatorname{Im} f$ なので，ある $\boldsymbol{v}_i\in V$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{w}_i$$

となる．このとき，

$$B\coloneqq\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_t\}$$

が V の基底であることを証明する．これが証明できれば，

$$\dim_{\mathbb{K}} V=s+t=\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Ker} f+\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im} f$$

となり，定理が示される．

<u>B が一次独立であること：</u> ある $c_1,\dots,c_s,d_1,\dots,d_s\in\mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s+d_1\boldsymbol{v}_1+\cdots d_t\boldsymbol{v}_t=\boldsymbol{0} \tag{13.1}$$

となったと仮定する．命題 11.2 より $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ なので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0}&=f(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s+d_1\boldsymbol{v}_1+\cdots d_t\boldsymbol{v}_t)\\&=c_1f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+c_sf(\boldsymbol{u}_s)+d_1f(\boldsymbol{v}_1)+\cdots d_tf(\boldsymbol{v}_t)\\&=d_1\boldsymbol{w}_1+\cdots d_t\boldsymbol{w}_t\qquad(\boldsymbol{u}_j\text{が}\operatorname{Ker} f\text{ の元であることと }\boldsymbol{v}_i\text{の定義より}).\end{aligned}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

ここで，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ は $\operatorname{Im} f$ の基底なので一次独立であるから，このとき

$$d_1 = \cdots = d_t = 0.$$

よって，(13.1) は，

$$d_1 = \cdots = d_t = 0 \quad \text{かつ} \quad c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}$$

と同値である．さらに $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底なので一次独立であるから，このとき

$$c_1 = \cdots = c_s = 0.$$

以上より，(13.1) は

$$c_1 = \cdots = c_s = d_1 = \cdots = d_t = 0$$

を導くので，B は一次独立である．

B が V を生成すること：$\boldsymbol{v}$ を V の任意の元としたとき，$\boldsymbol{v}$ が B の元の一次結合で書けることを示せばよい．$f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$ なので，$f(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ の一次結合として，

$$f(\boldsymbol{v}) = d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{w}_t$$

と書ける．この $d_1, \ldots, d_t \in \mathbb{K}$ を用いて，

$$\boldsymbol{v}' \coloneqq \boldsymbol{v} - d_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{v}_t$$

と置く．このとき，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v} - d_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{v}_t) \\ &= f(\boldsymbol{v}) - d_1 f(\boldsymbol{v}_1) - \cdots - d_t(\boldsymbol{v}_t) \\ &= f(\boldsymbol{v}) - d_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{w}_t \qquad (\boldsymbol{v}_i\text{の定義より}) \\ &= \boldsymbol{0} \qquad (d_1, \ldots, d_t\text{の定義より}). \end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{v}' \in \operatorname{Ker} f$ なので，$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ の一次結合として

$$\boldsymbol{v}' = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s$$

と書ける．以上より，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{v}_t = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{v}_t$$

となるので，$\boldsymbol{v}$ は確かに B の元の一次結合で書けることがわかる． □

注意 1. 次元定理より，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f$$

となることがわかる．これは，“f によって V から $\operatorname{Ker} f$ の分がつぶされて $\operatorname{Im} f$ が得られる” というようにとらえておくとよい．この主張は商ベクトル空間という概念を学ぶと定式化され，

$$V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

という同型として述べられる (左辺が商ベクトル空間)．商ベクトル空間は本講義では扱わないが重要な概念なので，気になる方は調べてみて欲しい[*1]．

[*1] 2 年生の代数学 I で少し解説する．

例 1. 線形写像

$$f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}),\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1-3c_2+3c_3+2c_4 & 5c_2+4c_3+c_4 \\ c_1-2c_2+c_3+c_4 & c_1+8c_2+2c_3 \end{pmatrix}$$

の像

$$\mathrm{Im}\, f := \left\{ \begin{pmatrix} c_1-3c_2+3c_3+2c_4 & 5c_2+4c_3+c_4 \\ c_1-2c_2+c_3+c_4 & c_1+8c_2+2c_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K} \right\}$$

の次元を計算してみよう．次元定理より，$\mathrm{Ker}\, f$ の次元がわかれば良い．

$$f\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c_1-3c_2+3c_3+2c_4 & 5c_2+4c_3+c_4 \\ c_1-2c_2+c_3+c_4 & c_1+8c_2+2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{cases} c_1-3c_2+3c_3+2c_4=0 \\ 5c_2+4c_3+c_4=0 \\ c_1-2c_2+c_3+c_4=0 \\ c_1+8c_2+2c_3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この連立一次方程式を解くと (第 10 回レポート課題問題 3 解答例参照)，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意パラメータ}).$$

よって，

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = 1$．これより，次元定理から，

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^4 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = 4 - 1 = 3.$$

例 2. V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元とする．$f\colon V \to W$ が単射線形写像であるとき，命題 11.7 より $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ なので，次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f.$$

これは，命題 12.1 で述べた主張に他ならない．

次に次元定理を用いて，行列のランクの新しい解釈を与えておこう．

定理 13.2

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと (つまり $A = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$)，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

である．さらに，

$$\mathrm{rank}\, A = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A$$

となる．

証明. 像の定義より，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} f_A = \{f_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} &= \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \{x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} \\
&= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}.
\end{aligned}
$$

よって，1 つめの等式は示された．次に次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A.$$

ここで，定理 10.10 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A$$

である (定理 10.10 の W_A は定義から $\operatorname{Ker} f_A$ に他ならないことに注意)．よって，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A.$$

□

この定理をもとに一般の線形写像に対してもランクを以下のように定義する．

定義 13.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f \coloneqq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

とし，これを f の**ランク (または階数)** という．

例 3. 例 1 での計算より，線形写像

$$f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}), \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

のランクは，

$$\operatorname{rank} f = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = 3$$

である．

線形写像 f_A の像の基底の計算方法について

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき $\operatorname{Im} f_A$ の基底を具体的に求める方法を考える．P を n 次正則行列とすると，命題 12.10 より，

$$f_P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$$

は同型写像なので，特に全射であるから，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f_A \circ f_P) &\coloneqq \{f_A(f_P(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} \\
&= \{f_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} \quad (f_P\text{は全射なので，全ての }\mathbb{K}^n\text{の元は }f_P(\boldsymbol{x})\text{ の形で書けるため}) \\
&= \operatorname{Im} f_A
\end{aligned}
$$

である．さらに，第 11 回講義資料例 7 より，

$$f_A \circ f_P = f_{AP} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto AP\boldsymbol{x}$$

となる．よって，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Im} f_{AP} \tag{13.2}$$

であり，$\operatorname{Im} f_A$ の基底を求めることは，$\operatorname{Im} f_{AP}$ の基底を求めることと同じである．

ここで，A に列基本変形を繰り返し施すことを考える．列基本変形とは以下の変形であった：

(I) A のある列の定数倍を他の列に加える．

(II) A のある列に 0 でない定数を掛ける．

(III) A の 2 つの列を入れ替える．

行基本変形のときと同様，これらの変形は A に<u>右から</u>ある n 次正則行列を掛けることで実現される．例えば以下のようになる：

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 1 列目に 3 列目の t 倍を加えると，$\begin{pmatrix} 1+3t & 2 & 3 \\ 4+6t & 5 & 6 \\ 7+9t & 8 & 9 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1+3t & 2 & 3 \\ 4+6t & 5 & 6 \\ 7+9t & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 列目を t 倍 $(t \neq 0)$ すると，$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 3 \\ 4 & 5t & 6 \\ 7 & 8t & 9 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 3 \\ 4 & 5t & 6 \\ 7 & 8t & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 列目と 3 列目を入れ替えると，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

これより，A の列基本変形を繰り返して A' が得られたとすると，(13.2) より，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Im} f_{A'}$$

である．列基本変形を用いて行基本変形と同様の掃き出し法を考えることによって，A を以下の形の階段行列 A' にできる：

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots \\ * & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \cdots \\ * & \boxed{1} & 0 & \cdots \\ * & * & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots \\ * & * & \boxed{1} & \cdots \\ * & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}'_s \ \boldsymbol{0} \ \cdots \ \boldsymbol{0})$$

このとき，A' の $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトルたち $\boldsymbol{a}'_1, \dots, \boldsymbol{a}'_s$ は一次独立であり (証明は列ベクトルの形から容易なのでここでは省略する．定理 10.10 の証明参照．)，定理 13.2 より，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Im}\, f_{A'} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}'_1, \dots, \boldsymbol{a}'_s\}$$

となって $\mathrm{Im}\, f_A$ を生成するので，これは $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底である．以上をまとめて書くと，

> $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は A を<u>列基本変形で</u>階段行列にし，その結果得られた行列の列ベクトルのうち $\boldsymbol{0}$ でないものを全て取ってくることで得られる

ということがわかる．特に，$\mathrm{Im}\, f_A$ の次元は列基本変形で得られた階段行列の段の数であり，定理 13.2 より，これは $\mathrm{rank}\, A$ に等しい．これより，

> これまで $\mathrm{rank}\, A$ は行基本変形で階段行列にしてその段の数を数えていたが，列基本変形で階段行列にしてその段の数を数えることで求めても良い

ということがわかる．

例 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

として，線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^4,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき

$$\mathrm{Im}\, f_A = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 + 2c_5 \\ -c_1 - 2c_2 + 2c_3 + 4c_4 - c_5 \\ -2c_1 - 4c_2 + 2c_3 + 2c_4 - 3c_5 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_4 \end{pmatrix} \middle|\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{K} \right\}$$

の基底を具体的に求めてみよう．A を列基本変形で階段行列にすると以下のようになる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4,5 列に加える}]{\text{第 1 列の}-2\text{ 倍},1\text{ 倍},1\text{ 倍},-2\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 4,5 列に加える}]{\text{第 3 列の}-3\text{ 倍},-1\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列と第 3 列を入れ替える}]{\text{第 2 列と第 3 列を入れ替えた後,}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，求める $\operatorname{Im} f_A$ の基底の 1 つは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

である．とくに，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = 3(= \operatorname{rank} A)$ である．ちなみに，次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^5 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = 5 - 3 = 2$$

である (第 10 回講義資料例 22 の計算と比較せよ)．

13.2　表現行列 (その 1)

以下では，$\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列 A に対し，f_A と書くと，常に線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を意味することとする．

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．線形写像 $f \colon V \to W$ を行列に対応する線形写像 f_A を用いて表すことを考えよう．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とする．このとき命題 12.4 より，線形写像

$$\psi_B \colon \mathbb{K}^n \to V \qquad \psi_{B'} \colon \mathbb{K}^m \to W$$

で

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j,\ j = 1, \ldots, n \qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{13.3}$$

を満たすものがそれぞれただ 1 つ存在する．このとき，$\psi_B, \psi_{B'}$ はいずれも基底を基底に送る写像なので，線形同型写像である (例えば定理 12.9 の証明の $\Leftarrow$ 方向参照)．命題 12.7 より $\psi_{B'}^{-1} \colon W \to \mathbb{K}^m$ も線形同型写像であり，さらに命題 11.3 (3) より線形写像の合成は線形写像なので，線型写像 $f \colon V \to W$ に対し，

$$\psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

という線形写像が定義できる．このとき，定理 12.5 より，

$$f_A = \psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B \tag{13.4}$$

を満たす $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ がただ 1 つ定まる．この A を**基底 B, B' に関する f の表現行列**という．図式で表すと以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\wr", "\psi_{B'}^{-1}"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\psi_B", "\wr"'] \arrow[r, "f_A"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

もう少し具体的に表現行列を求める方法を考えてみよう．$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ であったので，A は $m \times n$ 行列である (n は V の次元，m は W の次元である)．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書くことにする．このとき，$f = \psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$ であることに注意すると，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_j) &= \psi_{B'}(f_A(\psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}_j))) \\ &= \psi_{B'}(f_A(\boldsymbol{e}_j)) \\ &= \psi_{B'}(A\boldsymbol{e}_j) \\ &= \psi_{B'}\left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi_{B'}\left(a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m\right) \\ &= a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

となる．よって，以下がわかる：

> 基底 $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する f の表現行列の第 j 列目は $f(\boldsymbol{v}_j)$ を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の一次結合で書いた時の各係数を順に並べたものとなる．

この関係を形式的に[*2]行列の掛け算のルールを用いて，

$$(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \cdots\ \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13.5}$$

というようにも書く．W が $\mathbb{K}^m$ のときは (形式的ではなく通常の) 行列の等式である．

例 5. V と W を $\dim_{\mathbb{K}} V = 4, \dim_{\mathbb{K}} W = 3$ であるような $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ を W の基底とし，線形写像 $f\colon V \to W$ が

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 + 3\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 2\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= 2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + 5\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_4) &= 3\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 \end{aligned}$$

で定まっているとする．このとき，基底 B, B' に関する f の表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

である．(13.5) の表記法を用いると，

$$(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ f(\boldsymbol{v}_3)\ f(\boldsymbol{v}_4)) = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

である．$f(\boldsymbol{v}_j)$ らと $\boldsymbol{w}_i$ らの関係が簡潔に表されているということがわかるであろう．

[*2] $f(\boldsymbol{v}_j)$ や $\boldsymbol{w}_i$ は一般のベクトル空間の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^m$ の元ではないが形式的にこれを並べて，行列のように扱っているという意味．

例 6. $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

をとる．このとき，

$$f_A(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m$$

となるので，$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ の $E_n \coloneqq \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, E_m \coloneqq \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ に関する表現行列は A である．実際『線形写像に対する表現行列』のお手本となっているのは，『f_A に対する A』である．この関係を頭に入れておくと，線形写像 f から表現行列を取り出す方法を覚えられるだろう．

では一般に，$B = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底，$B' = \{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m\}$ を $\mathbb{K}^m$ の基底としたとき，f_A の B, B' に関する表現行列はどうなるだろうか．

$$P \coloneqq (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n) \qquad Q \coloneqq (\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_m)$$

とおく (命題 4.3 より，これらは正則行列である)．ここで，

$$f_P(\boldsymbol{e}_j) = P\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{p}_j,\ j = 1, \ldots, n \qquad f_Q(\boldsymbol{e}_i) = Q\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{q}_i,\ i = 1, \ldots, m$$

より，(13.3) と比べると，このとき $\psi_B = f_P, \psi_{B'} = f_Q$ であることがわかる．よって，第 11 回講義資料例 7, 例 8 の計算より，

$$\psi_{B'}^{-1} \circ f_A \circ \psi_B = f_Q^{-1} \circ f_A \circ f_P = f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P = f_{Q^{-1}AP}$$

となる．よって，表現行列の定義 (13.4) より，f_A の B, B' に関する表現行列は $Q^{-1}AP$ である．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，f_A の $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

f_A の $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

例 7. 最後に表現行列の応用例を見ておこう．$\mathbb{K}$ の元を係数とする 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 2} \coloneqq \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

とする (第 9 回講義資料例 11)．ここで，次のような写像を考えてみる：

$$F \colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (1 + x + x^2)f''(x) + 2xf'(x) + f(1).$$

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分したもの，$f''(x)$ は $f(x)$ を 2 階微分したものである．例えば，

$$F(1 + 3x + x^2) = (1 + x + x^2) \cdot 2 + 2x(3 + 2x) + (1 + 3 \cdot 1 + 1^2) = 7 + 8x + 6x^2$$

である．この F は線形写像となる (各自チェックせよ)．このとき F を一般の元 $a+bx+cx^2$ に n 回施した

$$F^n(a+bx+cx^2) \coloneqq (\underbrace{F\circ\cdots\circ F}_{n\text{ 回}})(a+bx+cx^2)$$

はどうなるだろうか？ これを表現行列の考え方を用いて求めてみる．$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底の 1 つとして $B=\{1,x,x^2\}$ が取れる (第 10 回講義資料例 15)．このとき，

$$\begin{aligned}
F(1) &= (1+x+x^2)\cdot 0 + 2x\cdot 0 + 1 = 1 \\
F(x) &= (1+x+x^2)\cdot 0 + 2x\cdot 1 + 1 = 1+2x \\
F(x^2) &= (1+x+x^2)\cdot 2 + 2x\cdot 2x + 1 = 3+2x+6x^2
\end{aligned}$$

より，F の B(定義域も値域も) に関する表現行列は，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}$$

である．((13.5) の表記法を用いると，$(F(1)\ F(x)\ F(x^2)) = (1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}$ である.)(13.3) にならって，

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^3\to\mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ \boldsymbol{e}_1\mapsto 1,\ \boldsymbol{e}_2\mapsto x,\ \boldsymbol{e}_3\mapsto x^2,$$

という線形写像を考えると，表現行列の定義より

$$F=\psi_B\circ f_A\circ\psi_B^{-1}$$

なので，

$$\begin{aligned}
F^n(a+bx+cx^2) &= (\underbrace{(\psi_B\circ f_A\circ\cancel{\psi_B^{-1}})\circ(\cancel{\psi_B}\circ f_A\circ\cancel{\psi_B^{-1}})\circ\cdots\circ(\cancel{\psi_B}\circ f_A\circ\psi_B^{-1})}_{n\text{ 回}})(a+bx+cx^2) \\
&= (\psi_B\circ\underbrace{f_A\circ f_A\circ\cdots\circ f_A}_{n\text{ 回}}\circ\psi_B^{-1})(a+bx+cx^2) \\
&= \psi_B(f_{A^n}(\psi_B^{-1}(a+bx+cx^2))) \\
&= \psi_B\left(f_{A^n}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\right).
\end{aligned}$$

となる．よって，A^n を求めれば良い．このためには A の対角化とそれに用いる正則行列 P を求めれば良いのであった．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t)=\left|\begin{pmatrix}t-1&-1&-3\\0&t-2&-2\\0&0&t-6\end{pmatrix}\right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$

となるので，A の固有値は $1,2,6$ である．A は 3 つの相異なる固有値を持つことより，対角化可能である．

固有値 1 の固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\0&-1&-2\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad (c\text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 2 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 6 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(6I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 6 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ が取れる．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 + 10 \cdot 2^n & -2 - 5 \cdot 2^n + 7 \cdot 6^n \\ 0 & 10 \cdot 2^n & -5 \cdot 2^n + 5 \cdot 6^n \\ 0 & 0 & 10 \cdot 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる (第 2 回講義資料例 1，例 2 の計算参照)．以上より，

$$
\begin{aligned}
F^n(a+bx+cx^2) &= \psi_B\left(f_{A^n}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \psi_B\left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10+10\cdot 2^n & -2-5\cdot 2^n+7\cdot 6^n \\ 0 & 10\cdot 2^n & -5\cdot 2^n+5\cdot 6^n \\ 0 & 0 & 10\cdot 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\
&= \psi_B\left(\begin{pmatrix} a+(-1+2^n)b+\left((-2+7\cdot 6^n)/10-2^{n-1}\right)c \\ 2^n b+(-2^{n-1}+3\cdot 6^{n-1})c \\ 6^n c \end{pmatrix}\right) \\
&= a+(-1+2^n)b+\left(\frac{-2+7\cdot 6^n}{10}-2^{n-1}\right)c+(2^n b+(-2^{n-1}+3\cdot 6^{n-1})c)x+6^n cx^2
\end{aligned}
$$

となることがわかる．F を n 回施すという複雑な操作の計算が，表現行列の考え方を用いることで行列の n 乗計算に帰着され，行列の対角化を応用することで見事計算できたのである．