線形代数 II 第 14 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回は本講義の最終回である．前回は線形写像 $f\colon V \to W$ が与えられたとき，定義域 V と終域 W の基底を取って f を行列で表すという『表現行列』の考え方について導入を行った．ここで，V と W の基底の取り方は一般には無限にあるので，基底の取り方を変えてみたときに表現行列がどのように変わるのかということが気になるが，この点について今回は解説を行う．これにより，線形代数 I の講義で扱った行・列基本変形，本講義の前半で扱っていた対角化について，線形空間論からの見通し良い理解が得られるようになる．

本資料の最後には，補足として計量ベクトル空間について簡単な解説を行った．$\mathbb{K}^n$ には内積という操作も定まっていたが，ここでは一般のベクトル空間で内積の構造を持ったものというのを定式化する．

14.1　表現行列 (その 2)

以下では，$\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列 A に対し，f_A と書くと，常に線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を意味することとする．次は表現行列に関する基本的な命題である．

命題 14.1

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とし，線形同型写像

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^n \to V \qquad \psi_{B'}\colon \mathbb{K}^m \to W$$

をそれぞれ

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j,\ j = 1, \dots, n \qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i,\ i = 1, \dots, m$$

を満たすものとして定義する．$f\colon V \to W$ を線形写像とし，f の B, B' に関する表現行列を A としたとき，以下が成立する．

(1) $\operatorname{Ker} f = \psi_B(\operatorname{Ker} f_A)$．特に，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}} V - \operatorname{rank} A$.

(2) $\operatorname{Im} f = \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A)$．特に，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f (= \operatorname{rank} f) = \operatorname{rank} A$.

(3) f が線形同型写像であるための必要十分条件は A が正則行列であることである．

(4) U を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B'' を U の基底とする．このとき，線形写像 $f'\colon U \to V$ の B'', B に関する表現行列を A' とすると，線形写像 $f \circ f'\colon U \to W$ の B'', B' に関する表現行列は AA' である．

証明． まず，基底 B, B' に関する f の表現行列の定義より，

$$f = \psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$$

である．以下では，混乱を避けるためにベクトル空間 X における零元 $\boldsymbol{0}$ を $\boldsymbol{0}_X$ というように書くことにする．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

このとき，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f_A(\psi_B^{-1}(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^m}\} \quad (\psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{0}_W) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{K}^m}\text{なので}) \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f_A\} \\
&= (\psi_B^{-1})^{-1}(\operatorname{Ker} f_A) = \psi_B(\operatorname{Ker} f_A).
\end{aligned}
$$

よって，(1) は示された．なお，後半の主張は命題 12.1 と定理 10.10 より，

$$
\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}} \psi_B(\operatorname{Ker} f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A = \dim_{\mathbb{K}} V - \operatorname{rank} A
$$

となることよりわかる (定理 10.10 の W_A は定義から $\operatorname{Ker} f_A$ に他ならないことに注意)．

さらに，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = (\psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) = (f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{が存在して，} \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) = f_A(\boldsymbol{x})\} \quad (\psi_B^{-1}\text{は全射なので}) \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Im} f_A\} \\
&= (\psi_{B'}^{-1})^{-1}(\operatorname{Im} f_A) = \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A).
\end{aligned}
$$

よって，(2) も示された．なお，後半の主張は命題 12.1 と定理 13.2 より，

$$
\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A
$$

となることよりわかる．

次に，命題 12.10 より，

$$
f\text{ が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad f_A\text{が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad A\text{ が正則行列}
$$

である (1 つめの同値性は $\psi_B, \psi_{B'}$ が線形同型写像であることと，線形同型写像と線形同型写像の合成が線形同型写像であることより)．これより，(3) も示された．

最後に (4) を示す．$B'' = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_\ell\}$ とし，$\psi_{B''} \colon \mathbb{K}^\ell \to U$ を $\psi_B, \psi_{B'}$ と同様に，

$$
\psi_{B''}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_k,\ k = 1, \ldots, \ell
$$

を満たす線形同型写像として定義する．このとき，$f' \colon U \to V$ の B'', B に関する表現行列の定義より，

$$
f_{A'} = \psi_B^{-1} \circ f' \circ \psi_{B''}.
$$

よって，

$$
f_{AA'} = f_A \circ f_{A'} = (\psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B) \circ (\psi_B^{-1} \circ f' \circ \psi_{B''}) = \psi_{B'}^{-1} \circ (f \circ f') \circ \psi_{B''}.
$$

これより，定義から AA' が線形写像 $f \circ f' \colon U \to W$ の B'', B' に関する表現行列である． □

注意 1．命題 14.1 (1), (2) より，V, W の基底が取れている状況だと，線形写像 $f \colon V \to W$ の核や像の基底は f_A の核や像の基底が求められれば具体的に求められるということがわかる (それぞれ $\psi_B, \psi_{B'}$ で送ってやれば良い)．f_A の形の線形写像の核の基底の求め方は定理 10.10 で，像の基底の求め方は第 13 回講義資料 p.4–6 で解説しているので思い出しておこう．これにより，一般の線形写像 $f \colon V \to W$ の核や像の基底を求める方法が原理的には与えられたことになる[*1]．

[*1] 現実の問題に現れる行列は巨大なサイズであることがしばしばあり，実際にはコンピュータを用いても計算が難しいということが起こる．このため，ここでは “原理的に” と書いた．このような数値計算上の問題については私は専門外なのでここでは解説を避け，とにかく線形代数の講義としては有限回のステップで厳密に求める方法があるということを述べるにとどめておく．

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ の表現行列は V, W の基底の取り方に依っている．そこで，基底を取り替えたときに，表現行列がどのように変わるかを見ておこう．

まず，基底の変換の表し方について説明しておこう．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底とする．このとき，線形同型写像

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^n \to V, \qquad \psi_{B'}\colon \mathbb{K}^n \to V$$

をそれぞれ

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j,\ j = 1, \ldots, n, \qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}'_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

を満たすものとして定義する．このとき，

$$\psi_B^{-1} \circ \psi_{B'}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$$

は線形同型写像なので，定理 12.5(と命題 12.6) より，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$f_P = \psi_B^{-1} \circ \psi_{B'}$$

となる．この P がどういった行列なのかということをもう少し見てみよう．

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

と書く．このとき，$\psi_B \circ f_P = \psi_{B'}$ より，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}'_j &= \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_j) \\ &= (\psi_B \circ f_P)(\boldsymbol{e}_j) \\ &= \psi_B(P\boldsymbol{e}_j) \\ &= \psi_B(p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n) \\ &= p_{1j}\boldsymbol{v}_1 + p_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{v}_n \end{aligned} \tag{14.1}$$

となる．つまり，P は新しい基底と元の基底の変換を表す行列である．B と B' の基底の関係 (14.1) は，形式的に[*2]行列の掛け算のルールを用いて，

$$(\boldsymbol{v}'_1\ \boldsymbol{v}'_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P \tag{14.2}$$

というように書く．この P を **B から B' への基底の変換行列**という．

ここで，$\psi_B^{-1} \circ \psi_{B'} = f_P$ のとき，

$$\psi_{B'}^{-1} \circ \psi_B = (\psi_B^{-1} \circ \psi_{B'})^{-1} = (f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$$

なので，B から B' への基底の変換行列が P のとき，B' から B への基底の変換行列は P^{-1} であることも注意しておこう．

例 1. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間を $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ と書く．このとき，$B = \{1, x, x^2\}, B' = \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$ は共に $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であった (第 10 回講義資料例 15，例 21 参照)．このとき，

$$\begin{aligned} -3 + 2x + 2x^2 &= -3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ x - x^2 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 \\ -1 + x - x^2 &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 \end{aligned}$$

[*2] $\boldsymbol{v}_j$ や $\boldsymbol{v}'_j$ は一般のベクトル空間 V の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^m$ の元ではないが，形式的にこれを並べて行列のように扱っているという意味．V が $\mathbb{K}^n$ のときは，通常の意味での行列の等式になる．

なので (これが (14.1) 式に対応)，B から B' への基底の変換行列 P は，

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．(14.2) の表記を用いると，

$$\begin{pmatrix} -3+2x+2x^2 & x-x^2 & -1+x-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．この例からこの表記がもっともらしい表記であることが見て取れるだろう．

例 2. $B' = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$\boldsymbol{p}_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

となるので，$B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ から B' への基底の変換行列は，

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$$

である．

以下が基底の取り換えによる表現行列の変化規則である．

定理 14.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．$B_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, B_1' = \{\boldsymbol{v}_1', \ldots, \boldsymbol{v}_n'\}$ を V の基底，$B_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}, B_2' = \{\boldsymbol{w}_1', \ldots, \boldsymbol{w}_m'\}$ を W の基底とする．B_1, B_2 に関する f の表現行列を A とし，B_1', B_2' に関する f の表現行列を A' とする．ここで，B_1 から B_1' への基底の変換行列を P，B_2 から B_2' への基底の変換行列を Q としたとき，

$$A' = Q^{-1}AP$$

である．つまり，

$$(\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n') = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P \qquad (\boldsymbol{w}_1' \ \boldsymbol{w}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m') = (\boldsymbol{w}_1 \ \boldsymbol{w}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m)Q$$

であるとき，

$$(f(\boldsymbol{v}_1') \ f(\boldsymbol{v}_2') \ \cdots \ f(\boldsymbol{v}_n')) = (\boldsymbol{w}_1' \ \boldsymbol{w}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{w}_n')Q^{-1}AP$$

である．

証明.

$$\psi_{B_1}\colon \mathbb{K}^n \to V, \quad \psi_{B_1'}\colon \mathbb{K}^n \to V, \quad \psi_{B_2}\colon \mathbb{K}^m \to W, \quad \psi_{B_2'}\colon \mathbb{K}^m \to W,$$

をこれまでと同様に定義 (第 13 回講義資料 (13.3) 参照) すると，表現行列の定義 (第 13 回講義資料 (13.4))

より，

$$
\begin{aligned}
f &= \psi_{B_2} \circ f_A \circ \psi_{B_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ (\psi_{B'_2}^{-1} \circ \psi_{B_2}) \circ f_A \circ (\psi_{B_1}^{-1} \circ \psi_{B'_1}) \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ (\psi_{B_2}^{-1} \circ \psi_{B'_2})^{-1} \circ f_A \circ (\psi_{B_1}^{-1} \circ \psi_{B'_1}) \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ f_{Q^{-1}AP} \circ \psi_{B'_1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

となる．よって，B'_1, B'_2 に関する f の表現行列の定義より，

$$A' = Q^{-1}AP$$

である． □

定理 14.2 の主張は以下の図式にまとめられる：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\psi_{B_1}"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m \arrow[dd, bend left, "f_{Q^{-1}}", "\wr"'] \\
V \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "\psi_{B_2}^{-1}"', "\wr"] \arrow[d, "\psi_{B'_2}^{-1}"', "\wr"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_{Q^{-1}AP}"] \arrow[u, "\psi_{B'_1}"', "\wr"] \arrow[uu, bend left, "f_P"', "\wr"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

ここで，左から正則行列を掛ける操作は行基本変形の繰り返しで与えられ，右から正則行列を掛ける操作は列基本変形の繰り返しで与えられたということを思い出すと，『行基本変形の繰り返しを考えることは終域の基底を取り替える操作に対応し，列基本変形の繰り返しを考えることは定義域の基底を取り替える操作に対応する』ということがわかる．

例 3. 例 2 の対応より，第 13 回講義資料例 6 の例は，定理 14.2 の公式の $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m, B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, B'_1 = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}, B_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}, B'_2 = \{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m\}$ の場合の例を与えている．

例 4. 1 次以下，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間をそれぞれ $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}, \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ とする．ここで，

$$B_1 \coloneqq \{1, x\}, \quad B'_1 \coloneqq \{1+x, x\}, \quad B_2 \coloneqq \{1, x, x^2\}, \quad B'_2 \coloneqq \{-1+x^2, -x+x^2, x^2\}$$

とすると，B_1, B'_1 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ の基底，B_2, B'_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底となる．さらに，

$$
\begin{pmatrix} 1+x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1+x^2 & -x+x^2 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

なので，B_1 から B'_1 への基底の変換行列は $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B_2$ から B'_2 への基底の変換行列は $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．ここで線形写像 $F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ を

$$f(x) \mapsto xf(x) - f(x)$$

で定義する．このとき，

$$
\begin{aligned}
F(1) &= x - 1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x) &= x^2 - x = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2
\end{aligned}
$$

となるので，F の B_1, B_2 に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．一方，定理 14.2 より，F の B'_1, B'_2 に関する表現行列は，

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

14.2 線形変換

線形写像のうち定義域と終域が同じもの $f\colon V \to V$ を以下では**線形変換**と呼ぶ．また，線形変換を考える際には定義域の基底と終域の基底はいつも共通のものに取ることにする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底としたとき，線形変換 $f\colon V \to V$ の B, B に関する表現行列を，単に**線形変換 $f\colon V \to V$ の B に関する表現行列**ということにする．命題 14.1，定理 14.2 より，以下は直ちに導かれる：

定理 14.3

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．$f\colon V \to V$ を線形変換とし，f の B に関する表現行列を A とする．このとき，以下が成立する．

(1) $f'\colon V \to V$ を線形変換とし，f' の B に関する表現行列を A' としたとき，線形変換 $f \circ f'\colon V \to V$ の B に関する表現行列は AA' である．特に，$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 回}}\colon V \to V$ の B に関する表現行列は A^n である．

(2) $B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底とし，f の B' に関する表現行列を A'，B から B' への基底の変換行列を P としたとき，

$$A' = P^{-1}AP$$

である．つまり，

$$(\boldsymbol{v}'_1\ \boldsymbol{v}'_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P$$

であるとき，

$$(f(\boldsymbol{v}'_1)\ f(\boldsymbol{v}'_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{v}'_n)) = (\boldsymbol{v}'_1\ \boldsymbol{v}'_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}'_n)P^{-1}AP$$

である．

定理 14.3 (2) は，定理 5.4 の $\mathbb{K}^n$ を V にした一般化である．定理 5.4 のときは f_A という線形写像や表現行列という概念を導入していなかったので，少々遠回しな言い方になっていたが，言葉を準備した後だと非常に明解に述べられていることがわかる．

また，定理 14.3 (2) に現れた A を $P^{-1}AP$ にするという変換はこの講義の前半の対角化のところで現れていた変換であることに注目しよう．定理の見方で言うと，この変換は基底を取り替えたときの表現行列の変換である．つまり，行列 A の対角化は**『線形変換 f のある基底 B に関する表現行列が A で与えられたとき，そこから表現行列が対角行列になるような新たな基底を探す (P を探す) 作業』**ということができる．線形変換の表現行列が対角行列になるという状況について少し言葉を準備して述べておこう．

定義 14.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．$\mathbf{0}$ でない元 $\boldsymbol{v} \in V$ が，ある $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

を満たすとき，λ を f の**固有値**，$\boldsymbol{v}$ を f の**固有値 λ の固有ベクトル**という．さらに，f の固有値 λ に対して，

$$V(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

とし，これを f の**固有値 λ の固有空間**という．

注意 2. 定義 14.4 で A を n 次正方行列とし $f = f_A$ とすると，f の固有値，固有ベクトル，固有空間は A の固有値，固有ベクトル，固有空間に一致する (定義 2.1).

注意 3. 条件式を変形することで，f の固有空間 $V(\lambda)$ は

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\lambda \mathrm{id}_V - f)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_V - f)$$

と書くことができる ($\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は V 上の恒等写像である)．ここで，V を n 次元，B を V の基底とし，f の B に関する表現行列を A とすると，表現行列の定義より，$\lambda \mathrm{id}_V - f$ の B に関する表現行列は $\lambda I_n - A$ であることが確かめられる (チェックせよ)．これより，$\psi_B\colon \mathbb{K}^n \to V$ を命題 14.1 と同様に定義すると，命題 14.1 (1) より，

$$V(\lambda) = \psi_B(\mathrm{Ker}\, f_{\lambda I_n - A}) = \psi_B(\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\})$$

となることがわかる．よって，f の固有値 λ の固有ベクトルは，f の表現行列の固有値 λ の固有ベクトルを ψ_B で送って得られるものであることがわかる．特に，一般の線形変換の固有ベクトルも基底が具体的に取れれば表現行列を用いた計算で求められることがわかる．

例 5. 第 13 回講義資料例 7 を思い出そう．ここで考えていた

$$F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (1 + x + x^2) f''(x) + 2x f'(x) + f(1).$$

は線形変換である．ここで，$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底 $B = \{1, x, x^2\}$ に関する F の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となるのであった．さらに，A の固有値 λ の固有空間を $V_A(\lambda)$ と書くことにすると，第 13 回講義資料例 7 での計算より，

$$V_A(1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(6) = \left\{ t \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{K} \right\}$$

となるのであった．これより，F の固有値 λ の固有空間を $V_F(\lambda)$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned} V_F(1) &= \psi_B(V_A(1)) = \{t \mid t \in \mathbb{K}\}, \\ V_F(2) &= \psi_B(V_A(2)) = \{t(1+x) \mid t \in \mathbb{K}\}, \\ V_F(6) &= \psi_B(V_A(1)) = \{t(7 + 5x + 10x^2) \mid t \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

となる．実際これらが F の固有ベクトルになっていることを確かめてもらいたい．例えば，

$$F(7 + 5x + 10x^2) = 42 + 30x + 60x^2 = 6(7 + 5x + 10x^2)$$

である．

以下の定理は表現行列の定義から直ちにわかる．

定理 14.5

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．$f\colon V \to V$ を線形変換とし，f の B に関する表現行列を A としたとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

(2) 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{v}_j$ は固有値 λ_j の f の固有ベクトル．

定理 14.3 (2) と定理 14.5 より，以下の定理も直ちに従う．これは，定理 5.3 の一般の線形空間への一般化である．

定理 14.6

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) ある V の基底 B が存在して，B に関する f の表現行列が対角行列になる．

(2) V は f の固有ベクトルからなる基底 B を持つ．

与えられた線形変換がどのような固有ベクトル，固有値を持っているかということは様々な分野において非常に重要な問題となる．例えば量子力学的な問題意識については，長谷川浩司著『線型代数［改訂版］』の 19 章などを参考にすること (固有値は “エネルギー”，固有ベクトルは “定常状態” に対応する)．

定理 14.3 (2) より，線形変換の表現行列は基底を取り替えると A が $P^{-1}AP$ に取り替わるといった形で変わるのであった．逆に考えれば，『A が $P^{-1}AP$ に取り替えても変わらない値』は『線形変換 f そのものに備わっている値』というようにとらえることができる．ここで，行列式，固有多項式，トレースは次の性質を持っていたことを思い出そう (線形代数 I の内容，定理 4.1，第 5 回講義資料 p.4 注意 1 参照)：

A を n 次正方行列，P を n 次正則行列としたとき，以下が成立する：

- $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$.
- $\Phi_A(t) = \Phi_{P^{-1}AP}(t)$．ここで $\Phi_X(t)$ は X の固有多項式を表す (定義 3.2).
- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

これより，これらの値は線形変換 f に対して定めることができる：

定義 14.7

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，

(1) $\det(f) \coloneqq \det(A)$,

(2) $\Phi_f(t) \coloneqq \Phi_A(t)$,

(3) $\mathrm{Tr}(f) \coloneqq \mathrm{Tr}(A)$,

とし，(1) を f **の行列式**，(2) を f **の固有多項式**，(1) を f **のトレース**という．ここで，A は V のある基底 B に関する f の表現行列である．上に述べたように A は基底 B の取り方によって変わり得るが，$\det(A), \Phi_A(t), \mathrm{Tr}(A)$ の値は，基底の取り方 B に依らずに定まっていることに注意する．

例 6. 例 5 の F に対して，

$$\det(F) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = 12$$
$$\Phi_F(t) = \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -3 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}\right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$
$$\mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 9$$

である．

命題 14.1 (3) より，以下は直ちにわかる．

定理 14.8

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，以下の同値関係が成立する．

$$f \text{ は線形同型写像である} \quad \Leftrightarrow \quad \det(f) \neq 0.$$

次に固有空間の次元に関する定理を証明する．第 4 回講義資料の n 次正方行列 A の対角化可能性判定のアルゴリズムについて説明したところ (p.7, p.8) で，「A の固有値 λ であって，$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という連立一次方程式の解の自由度 ℓ が，A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 $t = \lambda$ の重複度 m と異なるものが存在するとき対角化不可能である」ということを述べたが，実はここの厳密な証明をしていなかった．定理 10.10 より，

$$\begin{aligned} \ell &= \dim_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid (\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \\ &= \dim_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} \\ &= \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda), \text{ ただし，} V(\lambda) \text{ は } A \text{ の固有値}\lambda\text{の固有空間} \end{aligned}$$

となるが，実は常に $\ell \leq m$ が成立する．これを述べるのが以下の定理である．これより，$\ell \neq m$ のときは，$\ell < m$ となるから，必要な数の一次独立な固有ベクトルを $V(\lambda)$ から選んでくることができないので対角化不可能であるというのが証明となる．ここまでの準備のもとに，今はこの定理の証明が簡単にできるので，ここで証明しておこう．

定理 14.9

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．f の固有方程式 $\Phi_f(t) = 0$ が $t = \lambda$ という解を重複度 $m (m \geq 1)$ で持つとき，f の固有値 λ の固有空間を $V(\lambda)$ とすると，

$$1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \leq m$$

である．

証明. B を V の基底とし，f の B に関する表現行列を A とする．このとき，仮定より，$\Phi_A(t) = \Phi_f(t) = 0$ は $t = \lambda$ という解を持つので，A は固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を少なくとも 1 つは持つ (第 3 回講義資料 3.3 節冒頭の議論参照)．このとき，注意 3 より，f も固有値 λ の固有ベクトルを持つ．よって，$1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)$ である．

次に，$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \leq m$ であることを示す．$\ell = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)$ とすると，次元の定義より，$V(\lambda)$ から ℓ 個の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ を選ぶことができる．$\dim_{\mathbb{K}} V = n$ とすると，定理 10.9 より，ここに V の $n - \ell$ 個の元を加えて $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell, \boldsymbol{v}_{\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．ここで，$j = 1, \ldots, \ell$ に関しては，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda\boldsymbol{v}_j$$

が成り立つことに注意すると，f の B に関する表現行列は,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_\ell & X \\ O & Y \end{pmatrix}$$

という形をしていることがわかる ($*$ には適当な数が入るという意味．X は $\ell \times (n-\ell)$ 行列，Y は $(n-\ell)$ 次正方行列，O は零行列)．これより，行列式の計算から

$$\Phi_f(t) = \Phi_A(t) = \det(tI_n - A) = (t-\lambda)^\ell \det(tI_{n-\ell} - Y)$$

となることがわかる．特に，$\det(tI_{n-\ell} - Y)$ も t に関する多項式であることに注意すると，f の固有多項式 $\Phi_f(t)$ は $(t-\lambda)^\ell$ で割り切れることがわかる．よって，固有方程式 $\Phi_f(t) = 0$ の解 $t = \lambda$ の重複度 m は ℓ 以上であることがわかる．よって，$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) = \ell \leq m$. □

コラム：部分空間の直和について (やや発展．興味のある方向け)

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_n$ を V の部分空間とする．このとき,

$$\begin{aligned} W_1 + \cdots + W_n &:= \{\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n \mid \boldsymbol{w}_j \in W_j, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup \cdots \cup W_n) \end{aligned}$$

とおくと，これは再び V の部分空間となる．これを $W_1, \ldots, W_n$ **の和**という．これは $W_1 + \cdots + W_n$ の和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ ではなく，和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ の生成する部分空間であることに注意すること (部分空間の和集合は一般に部分空間にはならないのであった．第 9 回講義資料 p.9 注意 3 参照)．ここで，$W_1, \ldots, W_n$ が

$$「\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n \text{ かつ } \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}」\text{ならば } \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たすとき，$W_1 + \cdots + W_n$ は**直和**であるといい，$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ と書く．この条件は『$W_1, \ldots, W_n$ のいくつかから $\boldsymbol{0}$ でない元を選んでくると自動的に一次独立になる』というように読める．

例 7. $\mathbb{R}^2$ において,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},\ W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},\ W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},$$

とする．このとき,

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in W_2 \text{ かつ } \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ならば，$s = t = 0$ となり，$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ となるので，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ である．さらに,

$$W_1 \oplus W_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup W_2) = \mathbb{R}^2$$

である．

一般に，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間として，W_1, W_2 をその部分空間としたとき，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ となる．なぜなら，$\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ で $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ となるとき，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ なので，W_1 は部分空間であることから,

$$\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_1 \in W_1.$$

よって，$\boldsymbol{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ なので，$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ であり，このとき，$\boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ も成立するからである．

この事実を使うと，$W_2 \oplus W_3, W_3 \oplus W_1$ もすぐにわかる．一方，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和ではない．なぜなら，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2,\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W_3$$

とすると，それぞれは $\boldsymbol{0}$ ではないが，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成立するためである．

直和に関しては以下の命題が成立する．

命題 14.10

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_n$ を V の有限次元部分空間とする．このとき，以下の (1), (2)，(3) は同値である．

(1) $W_1 + \cdots + W_n$ は直和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ である．
(2) 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$B_j \subset W_j$ を W_j の基底とすると，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ の基底である．
(3) $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + \cdots + W_n) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} W_n$.

証明． (1)⇒(2) 各 B_j が W_j を生成することより，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ を生成する．よって，B が一次独立であることを示せばよい．ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w}_i^{(j)} \in B_j (i = 1, \ldots, k_j, j = 1, \ldots, n)$ が存在して，

$$\begin{aligned} & c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)} \\ & + c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)} \\ & + \cdots \\ & + c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となったと仮定する (ただし $\boldsymbol{w}_i^{(j)}$ らは互いに異なるとする)．このとき，各行の和

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

は W_j の元であることから，直和の定義より，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)} = \boldsymbol{0}.$$

ここで，B_j は W_j の基底であったことから，一次独立なので，上式より全ての $i = 1, \ldots, k_j$ に対して，$c_i^{(j)} = 0$．これより，B の一次独立性が示された．

(2)⇒(1) $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ かつ $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ であると仮定する．このとき，全ての $j = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$ であることを示せばよい．B_j は W_j の基底なので，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w}_i^{(j)} \in B_j (i = 1, \ldots, k_j)$ が存在して，

$$\boldsymbol{w}_j = c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

と書ける (ただし，$\boldsymbol{w}_i^{(j)}$ らは互いに異なるとする)．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = & c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)} \\ & + c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)} \\ & + \cdots \\ & + c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)} \end{aligned}$$

となるが，いま B は $W_1+\cdots+W_n$ の基底であることから一次独立なので，すべての $i=1,\dots,k_j, j=1,\dots,n$ に対し，$c_i^{(j)}=0$．よって，このとき全ての $j=1,\dots,n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$ であることがわかる．

(2)⇒(3) 次元の定義が基底の元の個数であったことより明らかである．

(3)⇒(2) 各 B_j が W_j を生成することより，$B=B_1\cup\cdots\cup B_n$ は $W_1+\cdots+W_n$ を生成する．ここで，B の元の個数は $\dim_{\mathbb{K}} W_1+\cdots+\dim_{\mathbb{K}} W_n$ であり，仮定よりこれは $W_1+\cdots+W_n$ の次元に等しいので，定理 10.9 (1) より，これは $W_1+\cdots+W_n$ の基底となる． □

注意 4. 命題 14.10 の (1) と (2) の同値性の証明は W_j らの中に無限次元のものがある場合にも通用することがわかる．よって，(1) と (2) の同値性は W_j らの中に無限次元のものがあっても成り立つ．

さて，ここで固有ベクトルの一次独立性に関する以下の定理を思い出そう．

定理 4.5 (再掲)

$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k\in\mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が互いに異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

これは，ここで学んだ直和という概念を用いると，以下のように述べることができる (正方行列の固有ベクトルのに関する主張だが，注意 3 より，これは線形変換の固有ベクトルに関する主張に直ちに一般化できることに注意．)．

定理 14.11

$\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ を線形変換 $f\colon V\to V$ の互いに異なる固有値とし，f の固有値 λ_j の固有空間を $V(\lambda_j)$ と書くことにする．このとき，$V(\lambda_1)+\cdots+V(\lambda_k)$ は直和 $V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ である．

命題 14.10 の (1) と (2) の同値性と定理 14.11 を用いると，定理 14.6 は以下のように言い換えられることがわかる．

定理 14.12

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) ある V の基底 B が存在して，B に関する f の表現行列が対角行列になる．

(2) ある f の固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ が存在して，$V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ となる．

14.3　補足：計量ベクトル空間

本講義の後半では主に，線形代数 I，線形代数 II の前半で勉強してきた $\mathbb{K}^n$，行列に関する内容を一般のベクトル空間 V，線形写像・変換に一般化するということを行ってきた．そこで，本講義の最後の補足として，$\mathbb{K}^n$ における内積をベクトル空間に一般化する話について簡単に述べておこう．なお，この節の内容は講義時間内ではおそらく扱うことができないと思われるが，ここに述べる範囲については $\mathbb{K}^n$ での話をそのままベクトル空間での話に焼き直すだけとなっている．ただ，ベクトル空間の言葉で記述しておくということは応用を考える上で非常に大事なことである．

内積は一般のベクトル空間においては (座標が使えないので) その性質を用いて特徴づけることになる．以下の定義にある性質 (1)–(4) は命題 5.6 で示した性質 (1)–(4) にそれぞれ対応している．

定義 14.13

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V に写像

$$V \times V \to \mathbb{K},\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$$

であって，以下の性質 (1)–(4) を満たすものが定まっているとき，V を**計量ベクトル空間**といい，上の写像を V の**内積**と呼ぶ：

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{w} \bullet \boldsymbol{v}}$,

(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}$,

(3) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$c \in \mathbb{K}$ に対し，$(c\boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w} = \overline{c}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{v} \bullet (c\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w})$,

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} \geq 0$，さらに，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である $(a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{x} = x$ なので，上の複素共役は全て無視する．

例 8. 以下に計量ベクトル空間の例を挙げる：

(1) $\mathbb{R}^n$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \coloneqq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

によって，$\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間となる．

(2) $\mathbb{C}^n$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \coloneqq \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．この内積はエルミート内積と呼ぶのであった (定義 5.5).

(3) 複素係数 1 変数多項式のなすベクトル空間空間 $\mathbb{C}[x]$ は

$$f(x) \bullet g(x) \coloneqq \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．この内積は **L^2-内積**と呼ばれる (内積の定義を満たすことはチェックせよ).

(4) $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V の部分空間は V と同じ内積を用いることで再び $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間となる．例えば，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ は上の $\mathbb{C}[x]$ と全く同じ定義の内積を用いることで $\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．

以下の定義は定義 5.7 の定義をそのまま計量ベクトル空間に移したものである．

定義 14.14

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．

- $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v}}$ を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．内積の性質 (4) より，これは 0 以上の実数である．
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という．
- $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots\}$ を V の基底とする．ここで，

$$\boldsymbol{u}_i \bullet \boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

  が成立するとき，B を V の**正規直交基底**という．つまり，正規直交基底とは，各元の大きさが全て 1 で互いに直交するベクトルからなる V の基底のことである．

$\mathbb{K}^n$ においては，(正規直交基底とは限らない) 基底から，正規直交基底を作る "グラム・シュミットの直交化法" と呼ばれるアルゴリズムがあった (6.2 節参照)．ここで，グラムシュミットの直交化法で正規直交基底が得られる原理を思い出すと，これは実は内積の定義にある性質 (1)–(4) さえ満たされていれば同様に行うことができるということがわかる (補足プリント :『グラム・シュミットの直交化法について』参照)．ここにその方法を再掲しておこう．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram-Schmidt orthonormalization)

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．このとき，以下の方法で V の正規直交基底を得ることができる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &:= \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}'_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1, \\
\boldsymbol{u}'_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2 \bullet \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_2 \bullet \boldsymbol{u}'_2)}\boldsymbol{u}'_2, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_k &:= \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{u}'_i \bullet \boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{u}'_i \bullet \boldsymbol{u}'_i)}\boldsymbol{u}'_i, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &:= \boldsymbol{v}_n - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \bullet \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \bullet \boldsymbol{u}'_{n-1})}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k := \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_k||}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底．

特に，以下が言える．

定理 14.15

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とする．このとき，V は正規直交基底を持つ．

例 9. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ に L^2-内積を考え，これを計量ベクトル空間とみなす (例 8 (4) 参照)．$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底として標準的な $B = \{1, x, x^2\}$ をとり，これにグラム・シュミットの直交

法を適用することで正規直交基底を得てみよう．まず，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &\coloneqq 1 \\
\boldsymbol{u}'_2 &\coloneqq x - \frac{(1 \bullet x)}{(1 \bullet 1)} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = x - \frac{0}{2} = x \\
\boldsymbol{u}'_3 &\coloneqq x^2 - \frac{(1 \bullet x^2)}{(1 \bullet 1)} \cdot 1 - \frac{(x \bullet x^2)}{(x \bullet x)} x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x = x^2 - \frac{2/3}{2} - \frac{0}{2/3} x = \frac{1}{3}(3x^2 - 1).
\end{aligned}
$$

する．そして，$\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_1\|} \boldsymbol{u}'_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_2\|} \boldsymbol{u}'_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx}} \cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}} x \\
\boldsymbol{u}_3 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_3\|} \boldsymbol{u}'_3 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)^2 / 9 dx}} \cdot \frac{1}{3}(3x^2 - 1) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)
\end{aligned}
$$

で与えられる．これらは定数倍の差を除いて**ルジャンドル多項式**と呼ばれる多項式になっており，重要な多項式の 1 例を与えている．(より高次のものは $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ に上のグラム・シュミットの直交化法をどんどん適用することで得られる．) 興味を持った方は是非ルジャンドル多項式について調べてみて欲しい．