線形代数 II 第 2 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本講義の前半の目標は，

『n 次正方行列の対角化』

を理解することである．今回は，その第 1 回目として対角化のという考え方および，固有値，固有ベクトル，固有空間について学ぶ．

記号． 本講義を通して以下の記号を用いる．これらは一般的な記号である：

- $\mathbb{Z} \coloneqq \{$ 整数 $\}$.
- $\mathbb{Q} \coloneqq \{$ 有理数 $\}$.
- $\mathbb{R} \coloneqq \{$ 実数 $\}$.
- $\mathbb{C} \coloneqq \{$ 複素数 $\}$.

また，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の添え字に『$>0, \geq 0, <0, \leq 0$』を付けて，もとの集合からそれぞれ『正，0 以上，負，0 以下』の元を集めてきてできる部分集合を表す．例えば，$\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数全体のなす集合，$\mathbb{R}_{\leq 0}$ は 0 以下の実数全体のなす集合である．

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき，正の整数 n に対して，

$$\mathbb{K}^n \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

とする．特に，$\mathbb{K}^n$ の元はいつも列ベクトルと考えるということに注意しておこう．また，

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ (\text{ゼロベクトル}), \qquad \boldsymbol{e}_i = \begin{array}{c} \\ \\ i \triangleright \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ i = 1, \ldots, n \ (\text{単位ベクトル})$$

とかく．

2.1 対角化とは?

n を正の整数とする．n 次対角行列とは，

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

という形をした行列であった．この行列の 1 つの特徴としては，整数 m に対して，m 乗が以下のように簡単に計算できるということが挙げられる．

$$D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^m \end{pmatrix}$$

一般の n 次正方行列 A ではこんなに簡単に A^m は計算できない．そこで，A^m を計算するためのアイデアの 1 つが，『A の対角化を考える』というものである．先に例を見てみよう：

例 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる！これを，**A は P によって対角化される**という．

さて，この P をどのように求めたかということは一旦後回しにして，これを用いれば A^m が求められるということを見てみよう．上の式より，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} &= (P^{-1}AP)^m \\ &= \begin{cases} \overbrace{P^{-1}A\cancel{P}\cancel{P}^{-1}A\cancel{P}\cdots\cancel{P}^{-1}AP}^{m\text{ 個}} & (m \geq 0 \text{ のとき}), \\ \overbrace{P^{-1}A^{-1}\cancel{P}\cancel{P}^{-1}A^{-1}\cancel{P}\cdots\cancel{P}^{-1}A^{-1}P}^{-m\text{ 個}} & (m < 0 \text{ のとき}), \end{cases} \\ &= P^{-1}A^mP \end{aligned}$$

となる．この結果の辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けて，結局

$$A^m = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2^{1+m} & 0 & -3+3\cdot 2^m \\ 1-2^m & 2^m & -1+2^m \\ 2-2^{1+m} & 0 & -2+3\cdot 2^m \end{pmatrix}$$

となることがわかる．

もう 1 つ例を見ておこう．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 44 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 24 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．これより，$m \in \mathbb{Z}$ に対し，例 1 と同様の計算により，

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}$$

となる．この結果の辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けて，

$$\begin{aligned} A^m &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3\cdot 2^{m+1}+4\cdot 3^m-4^m & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m-1}-7\cdot 3^m+\frac{11}{6}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+2}+\frac{7}{2}\cdot 3^m-4^m & -\frac{1}{6}+2^{m-1}-\frac{3^m}{2}+\frac{1}{6}\cdot 4^m \\ 4-3\cdot 2^{m+2}+4\cdot 3^{m+1}-4^{m+1} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m}+\frac{22}{3}\cdot 4^m-7\cdot 3^{m+1} & \frac{3}{2}-2^{m+3}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+1}-4^{m+1} & -\frac{1}{6}+2^{m}-\frac{3^{m+1}}{2}+\frac{2}{3}\cdot 4^m \\ 4-3\cdot 2^{m+3}+4\cdot 3^{m+2}-4^{m+2} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m+1}-7\cdot 3^{m+2}+\frac{88}{3}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+4}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+2}-4^{m+2} & -\frac{1}{6}+2^{m+1}-\frac{3^{m+2}}{2}+\frac{8}{3}\cdot 4^m \\ 4-3\cdot 2^{m+4}+4\cdot 3^{m+3}-4^{m+3} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m+2}-7\cdot 3^{m+3}+\frac{352}{3}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+5}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+3}-4^{m+3} & -\frac{1}{6}+2^{m+2}-\frac{3^{m+3}}{2}+\frac{32}{3}\cdot 4^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる．

コラム：m 乗計算の応用例

上では正方行列の m 乗を計算するアイデアとして対角化について述べたが，正方行列の m 乗というものがどういったところで出てくるか 1 つ例を挙げておこう．

線形漸化式で定まる数列の一般項

次で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を考えよう．

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_3 = d, \quad a_{n+4} = -24a_n + 50a_{n+1} - 35a_{n+2} + 10a_{n+3} \quad (n \geq 0).$$

ただし，a, b, c, d は定数．このとき，この漸化式は行列を用いて次のように表示できる：

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0).$$

このとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$ とおくと，上式を繰り返し用いることで，任意の n に対して，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

となることがわかる．これより，後は A^n が計算できれば左辺を計算してその第 1 成分を見ることで a_n $(n \geq 1)$ が求められることがわかる．この A^n については，例 2 で計算したので，その結果を使うと，

$$\begin{aligned} a_n &= a(4 - 3\cdot 2^{m+1} + 4\cdot 3^m - 4^m) + b(-\frac{13}{3} + 19\cdot 2^{m-1} - 7\cdot 3^m + \frac{11}{6}\cdot 4^m) \\ &\quad + c(\frac{3}{2} - 2^{m+2} + \frac{7}{2}\cdot 3^m - 4^m) + d(-\frac{1}{6} + 2^{m-1} - \frac{3^m}{2} + \frac{1}{6}\cdot 4^m) \\ &= (4a - \frac{13}{3}b + \frac{3}{2}c - \frac{d}{6}) + (-6a + \frac{19}{2}b - 4c + \frac{d}{2})\cdot 2^m \\ &\quad + (4a - 7b + \frac{7}{2}c - \frac{d}{2})\cdot 3^m + (-a + \frac{11}{6}b - c + \frac{d}{6})\cdot 4^m \end{aligned}$$

であることがわかる．最後に x^m の形に出てくる部分の x は，A を対角化した時に対角成分に並んでいた数 $1, 2, 3, 4$ であるということに注意しておこう．

なお，A^m の現れる他の重要な話として，『行列 A の指数関数 e^A を考える』という話がある．これはまた別の機会に解説する．興味のある方は『行列の指数関数』というキーワードで調べてみてもらいたい．微分方程式等への応用がある重要な話題である．(実は上の数列の話題を “連続化” したような話と考えることができる．長谷川 浩司 著 「線型代数［改訂版］」第 5 章参照．)

さて，対角化の話に戻ろう．以下は非常に自然な問題だと思われる：

(Q1) n 次正方行列 A の対角化に用いる行列 (上の例 1, 2 の P) はどうやって見つけるのか?

(Q2) n 次正方行列 A に対して，A を対角化するような n 次正方行列 P はいつでも存在するのか?

これから何回かの講義ではこれらの疑問に答えていくことになる．ちなみに，(Q2) の答えは一般には NO である．

2.2 固有値，固有ベクトル，固有空間

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする[*1]．まずは上の (Q1) の問に答えることを目指す．重要な言葉を準備しよう．

定義 2.1

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列とする．$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ が，ある $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

を満たすとき，λ を **A の固有値**，$\boldsymbol{v}$ を **A の固有値 λ の固有ベクトル**という．さらに，A の固有値 λ に対して，

$$V(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\} (\subset \mathbb{K}^n)$$

とし，これを **A の固有値 λ の固有空間**という．言葉で言うと，固有値 λ の固有空間とは『固有値 λ の固有ベクトル (と $\mathbf{0}$) を全て集めてきてできる $\mathbb{K}^n$ の部分集合』である．

(Q1) の答えは大まかに言うと次のようになる：

『A の固有ベクトルを十分沢山知っていれば A を対角化する P を求めることができる』

この仕組みを説明する．$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ をそれぞれ固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対応する A の固有ベクトルであるとする．つまり，$i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda\boldsymbol{p}_i \tag{2.1}$$

であるとする．ここで，<u>$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を並べてできる行列 $P \coloneqq (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則であると仮定</u>する．これが，上の “固有ベクトルを十分沢山知っている” という言葉の正確な意味である．このとき，以下の原理で $P^{-1}AP$ が対角行列になる．

まず，$P^{-1}P = I_n$ (I_n は n 次単位行列．以下常にこの記号を使う．) であるが，これは列ごとの計算でみると，

$$(P^{-1}\boldsymbol{p}_1\ P^{-1}\boldsymbol{p}_2 \cdots P^{-1}\boldsymbol{p}_n) = P^{-1}P = I_n = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n)$$

ということを表している．両辺を比べると，$i = 1, \ldots, n$ に対して，$P^{-1}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{e}_i$ であることがわかる．これと

[*1] この講義ではしばしば『$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする』という言葉が出てくるが，進んで勉強している方はより一般に，『$\mathbb{K}$ を体 (field) とする』と読み替えて良い．ただし，たまに $\mathbb{C}$(より一般には代数閉体) でないと通用しない議論があるので，そこは注意する必要がある．そのような場所はプリント内でも適宜注意することにする．

(2.1) を合わせると，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}A(\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n) \\
&= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1 \cdots A\boldsymbol{p}_n) \\
&= P^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\lambda_1 P^{-1}\boldsymbol{p}_1 \cdots \lambda_n P^{-1}\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることがわかる．これより A の固有ベクトルを，それを並べてできる行列 P が正則になるくらい沢山見つけることができれば，その P を用いて A が対角化され，対角化の結果においては対応する固有値が対角に並ぶということがわかる．この具体的な実行のアルゴリズムについては次回以降解説を行う．上で見た例 1, 2 の P もこの方法で見つけられるものである．

例 3. 例 1 の A, P を考える．このとき，P を列ごとに見て，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，確かに

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{p}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1 \\
A\boldsymbol{p}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{p}_2 \\
A\boldsymbol{p}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{p}_3
\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{p}_1$ は固有値 1 の固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は固有値 2 の固有ベクトルである．これより，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}A(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3) \\
&= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ A\boldsymbol{p}_2\ A\boldsymbol{p}_3) \\
&= P^{-1}(\boldsymbol{p}_1\ 2\boldsymbol{p}_2\ 2\boldsymbol{p}_3) \\
&= (P^{-1}\boldsymbol{p}_1\ 2P^{-1}\boldsymbol{p}_2\ 2P^{-1}\boldsymbol{p}_3) \\
&= (\boldsymbol{e}_1\ 2\boldsymbol{e}_2\ 2\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることがわかる．これは P の各列が固有ベクトルであることを知っていれば，$P^{-1}AP$(特に P^{-1}) を具体的に計算する必要は無いということを言っていることに注意しよう．

固有空間についても見ておこう．A の固有値 1 の固有空間は

$$V(1) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\}$$

であるが，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と考えると，

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3z = x \\ -x + 2y + z = y \\ -2x + 4z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

なので，これは上の連立一次方程式の解の空間に他ならない．これを解くと，

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

となることがわかる．同様に，

$$V(2) := \{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v} \}$$

であるが，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と考えると，

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ -2x + 4z = 2z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -x + z = 0$$

となるので，

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{K} \right\}$$

となる．こうしてみると $V(1)$ はパラメータが 1 つ (s) で記述されるので “1 次元分” あり，$V(2)$ はパラメータが 2 つ (s, t) で記述されるので “2 次元分” あり，$V(1)$ の元と $V(2)$ の元の和として 3 次元空間 $\mathbb{K}^3$ の元が全て作れるという状況になっている．実はこれが，『固有ベクトルを並べて正則な行列が作れる』(“固有ベクトルが十分沢山ある”) という事実に対応している．このことも今後の講義で厳密に扱う．

例 2 の方についても全く同様の計算ができる．こちらは是非各自試してみて欲しい．(A の固有値は $1, 2, 3, 4$ で，それぞれの固有空間の “次元” は全て 1 である．)

線形代数 II 第 3 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

3.1　前回の復習：問題の整理

私たちの目標は，

『n 次正方行列の対角化』

ができるようになることであった．考えていた問題は以下である．

(Q1) n 次正方行列 A の対角化に用いる n 次正方行列 P はどうやって見つけるのか?
(Q2) n 次正方行列 A に対して，A を対角化するような n 次正方行列 P はいつでも存在するのか?

前回学んだことは以下である：

(I) A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる行列 $P := (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則となるものがあれば，その P が A を対角化する行列である (第 2 回講義資料 p.4–5).
(II) A の固有値 λ がわかっているとき，対応する固有ベクトルは連立一次方程式を解けば見つけられる (第 2 回講義資料例 3).

このことから，残された問題は，

(Q1)′ n 次正方行列 A の固有値はどのようにして求めれば良いのか?
(Q2)′ A のどの固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列ができない場合，A は対角化できないのか? (つまり，固有ベクトルを並べて正則行列が作れるということは A が対角化可能出あることの必要十分条件なのか?) また，A の固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列にならないというようなことは実際に起こるのか?

ということになる．

3.2　対角化可能性

今回はまず (Q2)′ の前半に答えよう．答えは YES である．

命題 3.1

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能.
(2) A の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在する.

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) は第 2 回講義資料 p.4–5 の計算で示した通りなので，(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．A がある n 次正方行列 P を用いて対角化された，つまり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \cdots \lambda_n \boldsymbol{e}_n)$$

となったと仮定する ($\boldsymbol{e}_i$ という記号については第 2 回講義資料 p.1 参照)．このとき，P の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにすると (つまり $\boldsymbol{p}_i = P\boldsymbol{e}_i$)，

$$P^{-1}AP = (P^{-1}A\boldsymbol{p}_1 \cdots P^{-1}A\boldsymbol{p}_n)$$

となることより，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$P^{-1}A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$$

が成立することがわかる．この式の両辺に左から P を掛けると，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i P\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

となり，$\boldsymbol{p}_i$ は A の固有値 λ_i の固有ベクトルであることがわかる．これより，P が A の固有ベクトルを並べてできる n 次正方行列に他ならない． □

この証明を見ると，A を対角化する行列 P は結局 A の固有ベクトルを並べてできる正方行列でしかあり得ないということがわかる．A の取り方によっては，その固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列にならないというようなことがあり得るということは次の節で見ることにする．

3.3 固有多項式

次は，(Q1)$'$ に答えよう．A を n 次正方行列としたとき，『A の固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する』という条件を次のように言い換えてみる：

A の固有値λの固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する．
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$であって，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるものが存在する．
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$であって，$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (I_nは n 次単位行列) となるものが存在する．
$\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ が $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ．
$\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が 1 以上である．
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\lambda I_n - A) < n$.
$\Leftrightarrow$ $\lambda I_n - A$ は正則でない．
$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

この観察から，以下のような定義を行う．

定義 3.2

n 次正方行列 A に対し，$\underline{t\text{ を変数}}$とする多項式 $\Phi_A(t)$ を，

$$\Phi_A(t) := \det(tI_n - A)$$

と定義する．この多項式を A の**固有多項式** (あるいは**特性多項式**) という．また，方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

を A の**固有方程式** (あるいは**特性方程式**) という．

定義 3.2 の前の観察から以下の定理がわかる．

定理 3.3

n 次正方行列 A に対し，λ が A の固有値であることと，λ が A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解であることは同値である．

例 1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = |tI_2 - A| = \left|\begin{pmatrix} t+2 & -1 \\ 4 & t-3 \end{pmatrix}\right| = (t+2)(t-3) - (-1)\cdot 4 = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, 2$．よって，A は $-1, 2$ を固有値として持つ．

実際に対応する固有ベクトルを求めて A を対角化してみよう．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -x \\ -4x + 3y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

より，A の固有値 -1 の固有空間 $V(-1)$ は

$$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

で，固有値 -1 の固有ベクトルはここから $\mathbf{0}$ でないベクトルを 1 つ選べばよいから例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．同様に，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 2x \\ -4x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow 4x = y$$

より，A の固有値 2 の固有空間 $V(2)$ は

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 4s \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

で，固有値 2 の固有ベクトルはここから $\mathbf{0}$ でないベクトルを 1 つ選べばよいから例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ がとれる．このとき，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とするとこれは正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．なお，この最後の計算では P^{-1} を具体的に計算する必要はなくて，P が (固有値 -1 の固有ベクトル ，固有値 2 の固有ベクトル) という形の行列であることから結果が直ちにわかっているということに注意しよう．例えば，上で P における固有ベクトルの並べ方を変えて，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

としていると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 4 \\ 4 & t-3 & -4 \\ -3 & 5 & t+5 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t-2)(t-3)(t+5) + 5 \cdot (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \cdot 5 - (t-2) \cdot (-4) \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot (t+5) - 4 \cdot (t-3) \cdot (-3) \\
&= t^3 - 7t - 6 = (t+1)(t+2)(t-3)
\end{aligned}$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, -2, 3$．よって，A は $-1, -2, 3$ を固有値として持つ．実際に固有ベクトルを求める計算は各自例 1 の真似をして行ってみてもらいたい．最終的に対角化の結果として対角成分に $-1, -2, 3$ が 1 つずつ現れるものが得られれば正解である ($-1, -2, 3$ の並び方については例 1 で見たように P を作るときの固有ベクトルの並べ方による)．

例 3 ((やや発展))**.** $n \geq 2$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$ $(c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K})$ とする．このとき，A の固有多項式は

$$\Phi_A(t) = t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 \tag{3.1}$$

となる．このことを n に関する帰納法で証明する．まず，$n = 2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix}$ なので，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -c_0 & t - c_1 \end{pmatrix} \right| = t(t - c_1) - (-1)(-c_0) = t^2 - c_1 t - c_0$$

となり，(3.1) は確かに正しい．次に，$n = k(k \geq 2)$ の場合に (3.1) が成り立っていると仮定して，$n = k+1$ の場合を示す．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k \end{pmatrix} \quad ((k+1) \times (k+1) \text{ 行列})$$

に対し，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t - c_k \end{pmatrix} \right| \\
&= t \left| \begin{pmatrix} t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t - c_k \end{pmatrix} \right| + (-1)^{1+k+1}(-c_0) \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

(第 1 列に関して余因子展開)

ここで，和の第 1 項は $k \times k$ 行列で今考えている行列 A の形をしているものの固有多項式となっているので，帰納法の仮定より，

$$t\left|\begin{pmatrix} t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t-c_k \end{pmatrix}\right| = t(t^k - c_k t^{k-1} - \cdots - c_2 t - c_1) = t^{k+1} - c_k t^k - \cdots - c_2 t^2 - c_1 t$$

さらに，和の第 2 項の行列式は $k \times k$ の下三角行列の行列式で，対角成分は全て -1 なので，その値は $(-1)^k$(下三角行列/上三角行列の行列式は対角成分の積であったことを思い出そう．証明は余因子展開を考えれば容易である．)．よって，

$$(-1)^{1+k+1}(-c_0)\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{k+2}(-c_0)(-1)^k = ((-1)^2)^{k+1}(-c_0) = -c_0.$$

以上より，

$$\Phi_A(t) = t^{k+1} - c_k t^k - \cdots - c_2 t^2 - c_1 t - c_0$$

も示された．よって，(3.1) が証明された．

この例で扱った形の行列 A は，線形漸化式

$$a_{\ell+n} = c_0 a_\ell + c_1 a_{\ell+1} + \cdots + c_{n-1} a_{\ell+n-1}$$

で定まる数列 $\{a_\ell\}_{\ell=0,1,2,\ldots}$ を表すのに用いられる行列であった．つまり，この数列は

$$A\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\ell+1} \\ a_{\ell+2} \\ \vdots \\ a_{\ell+n} \end{pmatrix}$$

で定まる数列と言っても良い．このとき，この数列の一般項を求めるためには A^ℓ を求めれば良かった (第 2 回講義資料 p.3 コラム参照)．(必ずしも A が対角化できるとは限らないが，) もし A が対角化できるのであれば，A^ℓ を求められる．そこで，対角化のためにはまず A の固有値を知る必要があり，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解く必要がある．つまり，

$$t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 = 0$$

をまず解けばよいということがわかる．もし高校などで三項間漸化式

$$a_{\ell+2} = c_0 a_\ell + c_1 a_{\ell+1}$$

の解き方として，『まず特性多項式 $t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ を解く』という方法を習った人がいれば，『この方程式はどこから来たのか?』と思ったことがある人もいるかもしれないが，これはまさにここでの解法の $n = 2$ の場合に他ならない．この方法は実は n 項間漸化式に一般化できるものだったのである．

注意 1. n 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は，以下を満たすことに注意しよう．証明はいずれも固有多項式の定義から考えればわかるので考えてみて欲しい．

- n 次式で，t^n の係数は 1.
- 定数項は $(-1)^n \det(A)$.
- t^{n-1} の係数は A の対角成分の和を -1 倍したもの (A の (i,j) 成分を a_{ij} と書くことにすると $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$)．なお，A の対角成分の和は A の**トレース** $\mathrm{Tr}(A)$ と呼ばれる重要な値である．

つまり，一般に

$$\Phi_A(t) = t^n - \mathrm{Tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

という形をしている．特に，A が 2 次正方行列の時，

$$\Phi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)$$

である．

さて，対角化の話に戻ろう．正方行列 A の固有多項式は，固有値として「どういう数が出てくるか」という情報 (定理 3.3) だけでなく，最終的に対角化した時に「どういう数がいくつ出てくるか」という情報まで持っている．それを主張するのが以下の定理である．

定理 3.4

n 次正方行列 A が対角化可能であるとする．このとき，A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は以下のように一次式の積に書ける：

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$$

ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$．各 m_i は正の整数で，$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.
さらにこのとき，A を対角化した結果の対角成分には λ_i が m_i 個 $(i = 1, \ldots, k)$ 現れる．特に，A を対角化した結果は対角成分の並べ順の違いの差を除くと 1 通りに定まる．

証明の前に行列式に関する以下の性質を思い出す．

n 次正方行列 A, B に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

である．特に，$\det(A) \neq 0$ のとき，$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である．

定理 3.4 の証明． A が対角化できるとき，ある n 次正則行列 P を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \text{が } m_1 \text{個}, \lambda_2 \text{が } m_2 \text{個}, \ldots, \lambda_k \text{が } m_k \text{個})$$

という形に書ける．ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$(これまでの考察により，P の列ベクトルの並べ方を変えることで対角成分は自由に並べ替えられたことに注意する)．このとき，上で思い出した行列式に関する性質より，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \det(tI_n - A) \\
&= \det(P^{-1})\det(tI_n - A)\det(P) \\
&= \det(P^{-1}(tI_n - A)P) \\
&= \det(tI_n - P^{-1}AP) \\
&= \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}
\end{aligned}$$

となる．多項式 $\Phi_A(t)$ を 1 次式の積に分解する方法は 1 通りなので，これは A の対角化の結果が $\Phi_A(t)$ から (対角成分の並べ順の違いの差を除いて)1 通りに決まってしまっていることを意味している． $\square$

例 4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix}\right| \\ &= (t+1)(t-2)(t-4) + 0\cdot(-1)\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 0 - (t+1)\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot (t-4) - (-3)\cdot(t-2)\cdot 2 \\ &= t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t-2)^2\end{aligned}$$

となる．これより，定理 3.4 から，A は<u>対角化されるとすれば</u>，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となることがわかる (1 が 1 つ，2 が 2 つ)．第 2 回講義資料例 1 より，この A は実際にこの形に対角化可能であった．

例 5. 最後に，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化不可能であることを証明してみよう．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left|\begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| = t^3$$

となるので，定理 3.4 から，A は対角化されるとすれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる (対角成分に 0 が 3 つの対角行列)．しかし，このときこの式の両辺に左から P，右から P^{-1} を掛けて，

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，矛盾する．よって，A は対角化不可能である．実際，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

より，A の固有値 0 に対応する固有空間 $V(0)$ は

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \ \middle|\ s \in \mathbb{K} \right\}$$

となり，ここから 3 つのベクトルを選んで並べても 2, 3 行目が全て 0 の行列しか作ることができず，正則行列は作れない．

線形代数 II 第 4 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

今回『対角化可能性』についてより深く掘り下げ，対角化可能性の判定も含めて対角化が完全にできるようになることが目標である．

4.1　固有多項式補足

本題に入る前に，固有多項式の性質の 1 つについて補足しておく．この性質は前回の定理 3.4 の証明中で実質的に証明しているが，重要なので改めて定理として述べる．

定理 4.1

任意の n 次正方行列 A と任意の n 次正則行列 X に対し，A の固有多項式と，$X^{-1}AX$ の固有多項式は一致する．つまり，n 次正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$ と書くことにするとこのとき，

$$\Phi_A(t) = \Phi_{X^{-1}AX}(t)$$

である．

証明.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \det(tI_n - A) \\
&= \det(X^{-1})\det(tI_n - A)\det(X) \quad \left(\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det(X)}\text{なので}\right) \\
&= \det(X^{-1}(tI_n - A)X) \\
&= \det(tX^{-1}X - X^{-1}AX) \\
&= \det(tI_n - X^{-1}AX) = \Phi_{X^{-1}AX}(t).
\end{aligned}$$

□

4.2　一次独立

対角化可能性について掘り下げるにあたって，まず前回勉強した対角化可能であることの必要十分条件を思い出そう．

命題 3.1 (再掲)

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在する．

この (2) の条件が成り立つかどうかが計算で判定できるようになるのが今回の目標である．このために一つ重

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

要な一次独立という概念を導入する．

定義 4.2

$\mathbb{K}^n$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が**一次独立** (または**線形独立**) であるとは，

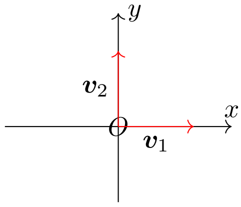
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は**一次従属** (または**線形従属**) であるという．

例 1. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = 0$ となるからである．



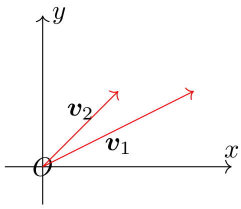
例 2. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は一次独立である．これは以下のように確かめられる．$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}2c_1 + c_2\\c_1 + c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

いま $\det\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = 1$ なので，一番右の式の両辺に左から $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて，

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

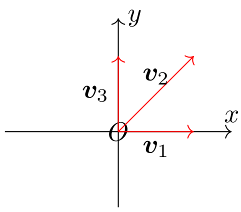
よって，このとき $c_1 = c_2 = 0$.



例 3. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は一次従属である．なぜなら，

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

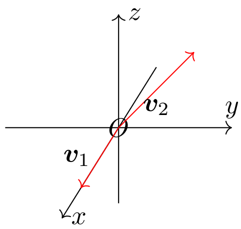
となるので，$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$ のときに，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立してしまうためである．



例 4. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = 0$ となるからである．



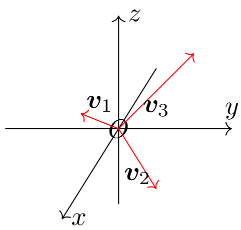
例 5. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

いま $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ なので，一番右の式の両辺に左から $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，このとき $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.



例 6. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ (s, t, u は任意の定数) は一次従属である．なぜなら，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_4.$$

これは，

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

を意味するので，$c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, c_4 = -1$ のときに $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ が成立してしまうためである．

以上の例を見ると，$\mathbb{K}^n$ においては最大で n 本の一次独立なベクトルが取れるということがイメージされるだろう．この考え方は実際に正しいということをもう少し進んだ線形空間の単元で説明する．線形空間論においては "その空間において一次独立となる最多のベクトルの数" を『次元』を定義するのである．これにより，『$\mathbb{K}^n$ の次元は n である』という直感に合う文章に厳密な定義を与えることができるようになる．

さて，対角化可能性の判定の話に戻ろう．一次独立性は次のように行列の正則性と関係している：

命題 4.3

n 次正方行列 P に対し，P の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにする (つまり，$P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$)．このとき，以下は同値である．

(1) P は正則．

(2) $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立．

証明． (1) ⇒ (2) :P が正則のとき，P^{-1} が存在して $P^{-1}P = I_n$ となるが，この式を列ごとに見ると，

$$(P^{-1}\boldsymbol{p}_1\ P^{-1}\boldsymbol{p}_2 \cdots P^{-1}\boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n)$$

となる．よって，両辺を比べると，$i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$P^{-1}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{e}_i$$

であることがわかる．これより，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{0}$$

が成立すると仮定すると，両辺に左から P^{-1} をかけて，

$$\boldsymbol{0} = c_1P^{-1}\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_nP^{-1}\boldsymbol{p}_n = c_1\boldsymbol{e}_1c_n + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

となる．よって，$c_1 = \cdots = c_n = 0$．これより，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立．

(2) ⇒ (1) :P が正則でない，つまり $\det(P) = 0$ であると仮定して矛盾を導く．P の転置行列 ${}^tP = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ を考える (つまり，これは i 行目が行ベクトル ${}^t\boldsymbol{p}_i$ となるような n 次正方行列)．

行列式の性質から $\det({}^tP) = \det(P) = 0$ となるので，${}^tP$ も正則ではなく，$\mathrm{rank}(P) < n$ となる．これより，${}^tP$ に行基本変形を繰り替えし行うことで，全ての成分が 0 となる行を第 n 行に持つ行列を作ることができる．行基本変形を繰り返し行う操作はある正則行列 Q を左からかける操作で実現されたということを思い出すと (線形代数 I の内容．忘れていた方は証明の後の注意参照．)，これはある正則行列 Q によって，

$$Q{}^tP = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となる ($*$ には適当な数字が入る) ということを言っている．ここで，Q の第 n 行目を $(q_{n1}\ q_{n2}\ \cdots q_{nn})$ と書くと，$Q{}^tP$ の第 n 行は

$$q_{n1}{}^t\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}{}^t\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}{}^t\boldsymbol{p}_n$$

と表されるので，(4.1) より，

$$q_{n1}{}^t\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}{}^t\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}{}^t\boldsymbol{p}_n = (0, \ldots, 0)$$

となることがわかる．両辺転置をすると，

$$q_{n1}\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}.$$

いま $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立であると仮定しているので，このとき

$$q_{n1} = q_{n2} = \cdots = q_{nn} = 0$$

となるが，これは Q が正則であるということに矛盾する．よって，背理法より P は正則である． □

注意 1. 命題 4.3 の (2) ⇒ (1) の証明においては P を転置した行列を考えているが，もし「列基本変形」および「列基本変形が正則行列を右からかけることで実現される」ということを知っている人がいれば，転置を考えずに直接列基本変形を用いて証明を行えばよい．

また，行基本変形がある正則行列を左からかける操作で実現されるというのは以下のような話であった．ここでは例で思い出すに留める．一般的な話は清水先生の線形代数 I の講義資料を参照のこと．

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 1 行目に 3 行目の t 倍を加えると，$\begin{pmatrix} 1+7t & 2+8t & 3+9t \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1+7t & 2+8t & 3+9t \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 行目を t 倍 $(t \neq 0)$ すると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4t & 5t & 6t \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4t & 5t & 6t \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 行目と 3 行目を入れ替えると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

命題 4.3 より，命題 3.1 は次のように言い換えられることがわかる：

定理 4.4

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A は一次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ を持つ．

さらに固有ベクトルの一次独立性については次がわかる．

定理 4.5

$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k \in \mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が互いに異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

証明. $\boldsymbol{p}_i$ に対応する固有値を λ_i と書く．つまり，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

とする．このとき仮定から，$i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であることに注意する．いま，$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

が成立すると仮定する．このとき，$c_1 = \cdots = c_k = 0$ となることを示せばよい．(4.2) の両辺に左から A をかけると，

$$\begin{aligned} & c_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

となる．次に，今得られた式の両辺にさらに左から A をかけると，

$$\begin{aligned} & c_1\lambda_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\lambda_1^2\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^2\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

このように，得られた式にさらに左から A をかけるという操作を上のように $k-1$ 回繰り返すと，

$$c_1\lambda_1^i\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^i\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}, \qquad i = 0, 1, \dots, k-1$$

となることがわかる．これらの式は行列を用いて次のようにあらわすことができる．

$$\begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{p}_1 & c_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & c_k\boldsymbol{p}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = O_k. \tag{4.3}$$

(O_k は $k \times k$ 零行列．) ここで，ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant) の公式より，

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

となる (この公式の証明をここですると寄り道が長くなるのでここでは行わない．清水先生の線形代数 I の講義資料を復習すること．また，忘れた方のために，この講義でも補足プリントとして証明を別途配布する．).

ここで，いま仮定から $i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であったので，上のファンデルモンド行列式の値は 0 ではない．

よって，$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するので，これを (4.3) の両辺に右からかけて，

$$\begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{p}_1 & c_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & c_k\boldsymbol{p}_k \end{pmatrix} = O_k.$$

いま，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は固有ベクトルなので特に零ベクトルではないから，このとき $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$． □

以上でわかったことをまとめよう：

定理 4.5 は『異なる固有値に対応する固有空間から ($\mathbf{0}$ でない) 固有ベクトルを選んでくるとそれらは自動的に一次独立になる』とも言える．このことから定理 4.4 とも合わせて次のことが直ちに言える：

定理 4.6

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つとき，A は対角化可能である．

以下では，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．このとき，複素数の範囲では任意の n 次多項式 $f(t)$ に対し，$f(t) = 0$ が重複も込めて n 個の解を持つということに注意しよう．

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つというのは，A の固有方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

が重解を持たず，n 個の互いに異なる解を持つということである．

これより，対角化可能性が問題になるのは，$\Phi_A(t) = 0$ が重解を持つときである．一般に A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ が

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

(ただし，$\lambda_i \in \mathbb{C}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$．各 m_i は正の整数で，$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$．) と分解されたとしよう．定理 3.4 より，A が対角化であるとすると，その結果の対角成分には λ_i が m_i 個 ($i = 1, \ldots, k$) 現れる．よって，定理 4.4，4.5 から，A が対角化可能であるということは，

各固有空間 $V(\lambda_i)$ から m_i本の一次独立なベクトルを選んでくることができる

ということと同値である．さらに，これは各 $i = 1, \ldots, k$ について，

各 $i = 1, \ldots, k$ について，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度が m_i

ということと同値である[*1]．以上を全て踏まえると，n 次正方行列 A の対角化は対角化可能性の判定も含め，以下のアルゴリズムで行えることがわかる．ただし，一般的な記号がわかりにくいという場合には一度飛ばして，この下の例を参照してほしい．

(Step 1) A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とする ($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は相異なるとする)．$\Phi_A(t)$ は t に関する n 次式なので，$m_1 + \cdots + m_k = n$ に注意する．

(Step 1') $m_1 = \cdots = m_k = 1$ のとき (つまり $\Phi_A(t) = 0$ が重解を持たないとき)，この時点で A は対角化可能であることがわかり，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．(このとき $k = n$ であることに注意．)

*1 この同値性は感覚的には認めていただけると思うが，厳密に証明しようとするともう少し議論が必要である．これは必要以上のややこしさを含むように思われるので，今後補足プリントで解説する．

(Step 2) 各 λ_i $(i=1,\dots,k)$ に対して，$x_1,\dots,x_n$ に関する連立一次方程式

$$(\lambda_i I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考え，この解を求める．固有値の定義より，これは少なくとも 1 つ以上の任意パラメータを含む以下の形の一般解を持つ：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)} + \cdots + c_{\ell_i}\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)} \quad (\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)} \in \mathbb{K}^n, c_1,\dots,c_{\ell_i}\text{は任意パラメータ})$$

ここで，任意パラメータは必要十分な数入っている，つまり $\ell_i = n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A)$ であるとする．実はこのとき，$\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)}$ は一次独立となる．

(Step 3) ある i が存在して，$\ell_i \neq m_i$ となるとき (実はこのとき $\ell_i < m_i$ である)，A は対角化不可能である．一方，そうならないとき，つまり，全ての i に対して $\ell_i = m_i$ となるとき，A は対角化可能である．

(Step 4) A が対角化可能であるとき (つまり，全ての i に対して $\ell_i = m_i$ となるとき)，

$$P \coloneqq (\boldsymbol{p}_1^{(1)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}\ \boldsymbol{p}_1^{(2)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^{(k)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)})$$

とすると，P は n 次正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1\text{が } m_1\text{個}, \lambda_2\text{が } m_2\text{個}, \dots, \lambda_k\text{が } m_k\text{個})$$

となる．

例 7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の対角化を考えてみる．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-5 & -2 & -4 \\ 4 & t+1 & 4 \\ 4 & 2 & t+3 \end{pmatrix}\right| \\ &= (t-5)(t+1)(t+3) + (-32) + (-32) - 8(t-5) - (-8)(t+3) - (-16)(t+1) \\ &= (t+1)(t-1)^2\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-1, 1$(重複度 2) である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 に対する一次独立な固有ベクトルの組として，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

これより A は対角化可能で，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

例 8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ の対角化を考えてみる．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-4 & -4 & 3 \\ -3 & t+1 & 9 \\ -5 & -3 & t+7 \end{pmatrix}\right| \\
&= (t-4)(t+1)(t+7) + 180 + 27 - (-27)(t-4) - 12(t+7) - (-15)(t+1) \\
&= (t+1)^2(t+2)
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 2), -2 である．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを考える．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 の重複度は 2 であるにも関わらず，固有値 -1 に対する 2 本の一次独立な固有ベクトルは存在しない．よって，A は対角化不可能である．

線形代数 II 第 5 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

今回は $\mathbb{K}^n$ の基底という概念を学び，この概念を元に『対角化とは何をしているのか』ということをとらえ直す．これは後に線形空間論で一般化される話の見本となるような考え方であり，難しい部分もあると思うが是非頑張って理解してもらいたい．後半では次回の準備として，$\mathbb{K}^n$ に内積を考え，ベクトルの大きさや，直交性について説明を行う．

5.1　$\mathbb{K}^n$ の基底

第 4 回の講義資料命題 4.3 では正則性と一次独立性の関係について述べた：

命題 4.3 (再掲)

n 次正方行列 P に対し，P の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにする (つまり，$P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$)．このとき，以下は同値である．

(1) P は正則.
(2) $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立.

$\mathbb{K}^n$ における一次独立性・従属性というのは n 個以外のベクトル対しても意味を持つ概念であるが (例えば第 4 回講義資料例 4 には $\mathbb{K}^3$ における 2 個の一次独立なベクトルの組が紹介されている)，$\mathbb{K}^n$ における$\underline{n\text{ 個}}$の一次独立なベクトルは次のような特別な性質をもつ．

命題 5.1

$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を $\mathbb{K}^n$ における一次独立なベクトルの組とする．このとき，任意の $\mathbb{K}^n$ の元は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合として<u>ただ一通りに</u>表される．つまり，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，ある $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ がただ一通りに定まり，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

となる．

証明. 列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を並べて n 次正方行列 $B = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)$ を作る．このとき命題 4.3 より，B は正則である．いま，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ に対して，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

であることに注意すると，今示すべきことは任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ がただ一通りに定まり，

$$B\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

となるということである．このためにはこの式を B を係数行列，$c_1,\dots,c_n$ を未知数とする連立一次方程式とみて，その解がただ一つだけ定まることを言えばよいが，いま B が正則であることよりこの主張は正しい．実際，任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ に対して $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=B^{-1}\boldsymbol{v}$ とすれば上の式は成立し，逆に上の式を成立させるためには，$\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ をこのように取るしかない．よって，命題は示された． □

命題 5.1 は『$\mathbb{K}^n$ における一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の標準的な座標に代わる新たな座標 (“目盛り”) として使える』ということを主張している．実際，

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{b}_n$$

と表されるとき，$\boldsymbol{v}$ に対して $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ を対応させることにすると，これは新たな座標を与えていると考えることができる：

$$\mathbb{K}^n\ni\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{b}_n\leftrightarrow\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$$

これは “通常の座標” が

$$x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

というものであったことと比較するとわかりやすい考え方であろう．つまり，『$\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n$ は $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の代わりとして使える』ということである．

この視点から『対角化とは何か』ということを見直してみる．n 次正方行列 A は n 個の一次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ を持つときに対角化可能で，$P=(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n)$ とすると，$P^{-1}AP$ が対角行列となるのであった．このとき命題 5.1 から，任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ は

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{p}_n,\quad c_1,\dots,c_n\in\mathbb{K}$$

の形に一通りに表すことができるので，上での議論したように『$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ は $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の代わりとして使う』ということを考えてみる．すると，

$$A\boldsymbol{v}=c_1A\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_nA\boldsymbol{p}_n=c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_n\lambda_n\boldsymbol{p}_n$$

(ただし λ_i は $\boldsymbol{p}_i$ に対応する固有値) となり，$\mathbb{K}^n$ において『A を掛ける』という操作で表される変換 (一次変換という) が非常に簡単に計算できることがわかる．つまり，

$$c_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{p}_n\leftrightarrow\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

という対応で考えてみると，A を掛けるという変換は

$$\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\lambda_1c_1\\ \vdots\\ \lambda_nc_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\ 0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

という対角行列を掛ける変換とみることができる．これが『対角化の意味』である．気持ちを説明すると，『n 次正方行列 A が複雑に見えるのは通常の座標の取り方が A に合っていないからで，適切な座標をとると，A が綺麗な形に見えるようになる』と言った具合である．これは見方として結構面白いのではないだろうか．

後で一般の線形空間 (ベクトル空間) を学ぶときに似たような考え方をする．用語を少し先取りして説明しておこう．

定義 5.2

$\mathbb{K}^n$ の部分集合 B が次の性質 (1)，(2) を満たすとき，B を $\mathbb{K}^n$ の**基底**という．

(1) B は一次独立である．

(2) 任意の $\mathbb{K}^n$ の元は B の元の一次結合として表される．つまり，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，ある $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B$ と $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k$$

となる．((2) の条件を『$\mathbb{K}^n$ は B の元で**生成される**』，または『$\mathbb{K}^n$ は B によって**張られる**』という．)[*1]

この言葉を使うと，命題 5.1 は

『$\mathbb{K}^n$ における一次独立な n 個のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ からなる集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底をなす』

というように言い換えられる．実は，逆の『$\mathbb{K}^n$ における任意の基底 B は一次独立な n 個のベクトルからなる集合である』という方向も正しい．これについては先の講義で扱うが，気になる方は理由を自分で考えてみて欲しい．これを認めると，対角化可能性の同値条件 (定理 4.4) も次のように言い直すことができる．

定理 5.3

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) $\mathbb{K}^n$ が A の固有ベクトルからなる基底を持つ．

次に『対角化とは何か』という説明のところで書いた議論をもう少し一般的に書いておこう．この話も後に線形空間論のところで『表現行列』という形で一般化される話であるが，その先取りである．

[*1] 定義 5.2 (2) の条件には命題 5.1 にあった『ただ一通りに』という条件が入っていないが，実はこれは条件 (1) から自動的に導かれる．実際，ある $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B$(各 $\boldsymbol{b}_i$ らは相異なるとする) と $c_1, \ldots, c_k, c'_1, \ldots, c'_k, \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = c'_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{b}_k$$

となったと仮定すると，移項して，

$$(c_1 - c'_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (c_k - c'_k)\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$$

となるが，B の一次独立性 (条件 (1)) により，このとき

$$c_1 - c'_1 = \cdots = c_k - c'_k = 0$$

つまり，

$$c_1 = c'_1,\ c_2 = c'_2, \ldots, c_k = c'_k$$

となる．これより，上での議論と同様に基底は $\mathbb{K}^n$ の “座標を与えるもの” というように考えられる．

定理 5.4

$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とし，$B = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)$ をこの基底の元を並べてできる n 次正則行列とする．このとき，

$$\mathbb{K}^n \ni c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

というように，$\mathbb{K}^n$ の各元を $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合で表した時の係数に着目して再び $\mathbb{K}^n$ の元で表示することにすると，もとの $\mathbb{K}^n$ において，A を (左から) 掛けるという変換は，新しい元の表示では $B^{-1}AB$ を $\mathbb{K}^n$ に (左から) 掛けるという変換で表されることになる．

証明． $A(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) = c_1A\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_nA\boldsymbol{b}_n$ を再び $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合で表して，

$$c_1A\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_nA\boldsymbol{b}_n = c_1'\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{b}_n$$

となったとする．このとき，$\boldsymbol{b}_i = B\boldsymbol{e}_i, B^{-1}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ に注意して (例えば命題 4.3 の証明 (1) ⇒ (2) 参照) 両辺に B^{-1} を掛けると，

$$c_1B^{-1}AB\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_nB^{-1}AB\boldsymbol{e}_n = c_1'\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{e}_n$$

となる，ここで，左辺を $B^{-1}AB(c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n)$ とまとめ，$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n, c_1'\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{e}_n$ をそれぞれ成分表示すると，

$$B^{-1}AB\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$$

となる．これは示したかった主張そのものである． □

定理 5.4 の見方をすると，前回紹介した以下の定理 4.1 にもう少し意味を持たせられる．

定理 4.1 (再掲)

任意の n 次正方行列 A と任意の n 次正則行列 X に対し，A の固有多項式と，$X^{-1}AX$ の固有多項式は一致する．つまり，n 次正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$ と書くことにするとこのとき，

$$\Phi_A(t) = \Phi_{X^{-1}AX}(t)$$

である．

これは，要するに『固有多項式は $\mathbb{K}^n$ の基底を取り替えて行列の "見方" を変えても変わらないものである』という定理だったのである．固有多項式 (そしてそこからわかる固有値) が "座標の取り方" というある意味人工的なものに依らない本質的な量であるということを実感していただけたのではないだろうか．

注意 1. n 次正方行列 A の対角成分の和をトレースといい，$\mathrm{Tr}(A)$ と書くのであった (第 3 回講義資料 p.5 注意 1)．つまり，A の (i, j) 成分を a_{ij} と書くことにすると，

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

である．このとき，任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ に対して，

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}) = \mathrm{Tr}(BA)$$

が成立するので，特に任意の n 次正方行列 A と任意の n 次正則行列 X に対し，

$$\mathrm{Tr}(X^{-1}AX) = \mathrm{Tr}(AXX^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$$

となる．よって，トレースも $\mathbb{K}^n$ の基底の取り方によらず定まる重要な値であることがわかる．

5.2 $\mathbb{K}^n$ における内積と正規直交基底

5.1 節では基底という概念を導入し，単位ベクトルのなす集合『$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の代わりとして使えるもの』という説明を行った．しかし，実際には $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という基底は，一般の基底に比べてもう少し特別である．それは，

(I) 各元 $\boldsymbol{e}_i$ の大きさが 1 である．

(II) $i \neq j$ のとき，$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ は直交している．つまり，$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は互いに直交しあうベクトルからなっている，

という性質があるところである．ここで，“大きさ” や “直交” という概念が出てきたが，これらは (特に 4 次元以上の場合) どのように定義していただろうか? ここでは，内積という概念を導入し，これらの意味を明確にしつつ，(I)，(II) のような性質を持つ基底について考察する[*2]．

定義 5.5

$\mathbb{K}^n$ の 2 元 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ に対し，

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \coloneqq \begin{cases} v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のとき}, \\ \overline{v_1} w_1 + \cdots + \overline{v_n} w_n & \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ のとき}, \end{cases}$$

とする．ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である $(a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$．
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときこの写像 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ を**内積**と呼び，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときこの写像 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ を**エルミート内積**と呼ぶ．ただし，本講義では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のとき，これらの写像 $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ をどちらも単に $\mathbb{K}^n$ の内積と呼ぶことにする．

注意 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$ であるが，$x \in \mathbb{R}$ に対しては $\overline{x} = x$ なので，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときも

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \overline{v_1} w_1 + \cdots + \overline{v_n} w_n$$

と書いて間違いではない (少々奇妙だが…)，このため，以下では $\mathbb{K}^n$ における内積を常に，

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \overline{v_1} w_1 + \cdots + \overline{v_n} w_n$$

と書くことにする．これは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときと $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときで毎回場合分けして証明などを記述する必要が無いようにするための工夫である．

以下は内積の基本性質である．

[*2] ここまで，“進んで勉強している方は $\mathbb{K}$ を一般の体 (field) として良い” として話を進めてきたが，内積が関係する議論についてはある内積の値が正になることを使う部分や，大きさを定義する際にルートをとるという操作が入る部分があるので一般の体では通用しないところがある．このため，本節以降は $\mathbb{K}$ は “本当に”$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であると思って読んでいただきたい．

命題 5.6

$\mathbb{K}^n$ の内積は以下を満たす：

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}}$.

(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.

(3) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$，$c \in \mathbb{K}$ に対し，$(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \overline{c}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{v} \cdot (c\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$.

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$，さらに，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

ただし，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$\overline{x} = x$ なので，上にある複素共役は全て無視して良い．(例えば，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ 等).

証明． (1), (2), (3) の証明は容易なので省略する (各ベクトルを成分表示すれば直ちにわかる)．(4) の証明も難しくないが，大事なのでここで解説する．任意の $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ に対して，

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \overline{v_1}v_1 + \cdots + \overline{v_n}v_n \geq 0$$

である．ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$ に対し，$\overline{z}z = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 (= |z|^2) \geq 0$ であることに注意する．$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ となるのは，全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して，$|v_i|^2 = \overline{v_i}v_i = 0$ となるときであるが，こうなるのは $v_i = 0$ のときだけなので，結局このとき $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である． □

注意 3. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときに，内積を $v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$ ではなく $\overline{v_1}w_1 + \cdots + \overline{v_n}w_n$ と定義したのは，命題 5.6 の (4) の性質を得るためである．複素共役を付けないとすると，例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$$

というようになってしまい，自分自身との内積の値が 0 であるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトルができてしまう．すぐ下で $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ の値を用いて $\boldsymbol{v}$ の『大きさ』を定義するが，これだと大きさが 0 であるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトルがあるように見え，あまり良い定義ではないことが納得できるだろう．他にも $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ が大きさと関係していて欲しいと考えると，その値は 0 以上の実数になっていてほしいところであるが，複素共役を付けないと，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = 1^2 + (1+i)^2 = 1 + 2i$$

というように値が複素数になることもあり，やはりこれは良い定義とは思えない．

複素共役を付けた正しい内積の定義では，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i = 1 + 1 = 2$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (1-i) \cdot (1+i) = 1 + 2 = 3$$

というようにちゃんと 0 以上の実数の値が出る．

注意 4. 本によっては，$\mathbb{C}^n$ の内積の定義を，

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1\overline{w_1} + \cdots + v_n\overline{w_n}$$

にしているものもある．この場合，命題 5.6 の (1)，(2)，(4) は全く同様に成立し，(3) は

(3)′ 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$，$c \in \mathbb{C}$ に対し，$(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{v} \cdot (c\boldsymbol{w}) = \overline{c}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$.

に変わる．

定義 5.7

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．命題 5.6 (4) より，これは 0 以上の実数である．
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という．
- $B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．ここで，

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

が成立するとき，B を $\mathbb{K}^n$ の**正規直交基底**という．つまり，正規直交基底とは，各元の大きさが全て 1 で互いに直交するベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底のことである．

正規直交基底と直交行列・ユニタリ行列は以下のように関係している：

命題 5.8

(I) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．n 次実正方行列 A に対し，A の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ と書くことにする (つまり，$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$)．このとき，以下は同値である．

(1) A は直交行列である．つまり，${}^tAA = I_n$ である．

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は正規直交基底である．

(II) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．n 次複素正方行列 A に対し，A の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ と書くことにする．このとき，以下は同値である．

(1) A はユニタリ行列である．つまり，$A^*A = I_n$ である．ここで，$A^* := {}^t\overline{A}$ (A を転置し，各成分の複素共役をとったもの)．

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は正規直交基底である．

証明. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ に対して，積 A^*B の (i,j) 成分は，A^* の (i,j) 成分が $\overline{a_{ji}}$ であることに注意すると，

$$\overline{a_{1i}}b_{1j} + \cdots + \overline{a_{ni}}b_{nj} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$$

(ここで，$\boldsymbol{a}_i$ は A の i 列目の列ベクトル，$\boldsymbol{b}_i$ は B の i 列目の列ベクトル) となる．これより，

$$A^*A = I_n \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

となるので (II) は示された．(I) は上の議論で複素共役を全て無視すればよい． □

例 1. 注意 3 での計算より，

$$\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

である．

例 2. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ は直交する．実際，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 1 + (-2i)\cdot i + 1\cdot(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

となる．

例 3. $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．実際，

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

とすると，

$${}^tAA = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，A は直交行列である (命題 5.8 (I) を用いてチェックした)．

次回，実対称行列は直交行列を用いて，エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化されるということを証明する．これは 5.1 節 (定理 5.3 参照) での考え方を思い出すと，実対称行列やエルミート行列は固有ベクトルからなる正規直交基底を持つということである．この話は応用の多い重要な話となる．(お楽しみに！)

線形代数 II 第 6 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

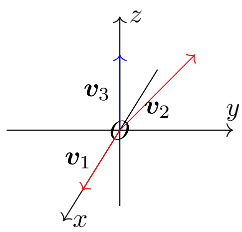
以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

6.1　$\mathbb{K}^n$ の基底に関する補足

第 5 回講義資料では，

『$\mathbb{K}^n$ の$\underline{n\text{ 個}}$の一次独立なベクトルの組は $\mathbb{K}^n$ の基底をなす』

ということを学んだ (命題 5.1，定義 5.2 参照)．一方，$\mathbb{K}^n$ において一次独立という概念自体は n 個でない元の組に対しても定義される (第 4 回講義資料例 4 参照)．以下の命題は『任意の $k(<n)$ 個の一次独立な $\mathbb{K}^n$ の元の組に対して，適当に $\mathbb{K}^n$ の元を $(n-k)$ 個選んでくれば n 個の一次独立な元の組にできる，つまり，任意の任意の $k(<n)$ 個の一次独立な $\mathbb{K}^n$ の元の組は基底の一部にできる』ということを保証している．例えば，第 4 回講義資料例 4 を考えると，$\mathbb{K}^3$ の一次独立な 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ に対し，例えば，$\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ をとると，$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ が $\mathbb{K}^3$ の基底となる ($\det(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)=1$ であるため．命題 4.3 参照．)．



これが感覚的に十分理解でき，証明を読むと逆に混乱しそうであるという方は以下の命題の証明は一旦飛ばして読んでも後の議論には影響しない．実際，これは “感覚的にはほぼ明らか” と言って良いだろう．

命題 6.1

$k<n$ とし，$\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ を一次独立な $\mathbb{K}^n$ の元の組とする．このとき，ある $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{b}_{k+1},\dots,\boldsymbol{b}_n\in\mathbb{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_{k+1},\dots,\boldsymbol{b}_n$ が n 個の一次独立な元，つまり，$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_{k+1},\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底となるようにできる．

証明． $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ に対して，

$$m:=\max\{\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\mid \text{ある } \boldsymbol{b}_{k+1},\dots,\boldsymbol{b}_{k+\ell}\in\mathbb{K}^n\text{が存在して，}\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_{k+1},\dots,\boldsymbol{b}_{k+\ell}\text{は一次独立}\}$$

とおく ($\max\{\dots\}$ は $\{\dots\}$ の元の中での最大値をとるという意味)．言葉で書くと，『m は一次独立性を保ったまま $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ に付け足せる元の数の最大値』である．示すべきことは $m=n-k$ である．

$\mathbb{K}^n$ における n 個の一次独立な元は基底になることより (命題 5.1)，$m\leq n-k$ である ($n-k+1$ 個目の元を追加しようとすると，それはそれまでの n 個の一次独立な元の一次結合として書けてしまうので一次独立性

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

を保った元の追加とはならない）．これより，$m = n - k$ であることを示すためには，$m < n - k$ であると仮定して矛盾を導けばよい．

$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k+m}$ を一次独立な $\mathbb{K}^n$ の元の組とする．m の最大性より，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k+m}, \boldsymbol{e}_j$ は一次従属となる．よって，ある $\widetilde{c}_{1,j}, \ldots, \widetilde{c}_{k+m,j}, a_j \in \mathbb{K}, a_j \neq 0$ が存在して，

$$\widetilde{c}_{1,j}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \widetilde{c}_{k+m,j}\boldsymbol{b}_{k+m} + a_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$$

となる (ここで，a_j が 0 でないのは，もしこれが 0 であったとすると $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k+m}$ が一次独立であるという仮定に矛盾するためである)．$a_j\boldsymbol{e}_j$ を移項した後，両辺を $-1/a_j$ 倍して，$c_{i,j} := -\widetilde{c}_{i,j}/a_j$ とおくと，

$$c_{1,j}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_{k+m,j}\boldsymbol{b}_{k+m} = \boldsymbol{e}_j \tag{6.1}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{b}_j$ を第 j 列に持つ $n \times (k+m)$ 行列 $B = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_{k+m})$ と，$c_{i,j}$ を (i,j) 成分とする $(k+m) \times n$ 行列 $C = (c_{i,j})_{i=1,\ldots,k+m, j=1,\ldots,n}$ を考えると，(6.1) は

$$BC = (\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n) = I_n$$

と書き換えられる．ここで，n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ を含む連立一次方程式

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6.2}$$

を考える．このとき，両辺に左から B をかけることで，

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \ &\Rightarrow BC\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\boldsymbol{0} \\ &\Rightarrow I_n\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\ &\Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \end{aligned}$$

となる．よって，連立一次方程式 (6.2) の解の自由度は 0 なので，いま $n - \operatorname{rank} C = 0$，つまり，$\operatorname{rank} C = n$ であることがわかる．ここで，$m < n - k$ とすると，$m + k < n$ なので，C の行の数が n より小さくなり，このとき $\operatorname{rank} C = n$ とはなりえないため矛盾する．よって，$m = n - k$ である．　□

注意 1．命題 6.1 の証明は第 5 回資料で証明を飛ばした，

『$\mathbb{K}^n$ における任意の基底 B は一次独立な n 個のベクトルからなる集合である』

ということの証明にもなっている．まず，$\mathbb{K}^n$ の基底 B の元の個数が $n+1$ 以上にならないということは『一次独立な n 個のベクトルがあると既に基底になる』という命題 5.1 からわかっている．よって，B の元の個数が n 未満だと仮定して矛盾を導けば良い．$B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell\}$ $(\ell < n)$ と仮定すると，基底の性質 (定義 5.2 (2)) から，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，$\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ らの一次結合で書ける．これは式で書くと (6.1) の形の式になっており，そうするとその後の証明は上の命題 6.1 の証明と同じである．以上より，$\mathbb{K}^n$ の部分集合 B に対し，

B は $\mathbb{K}^n$ の基底である $\Leftrightarrow$ B は一次独立な n 個のベクトルからなる集合である

という同値性が厳密に証明できた．

6.2 グラム・シュミットの直交化法

6.1 節では，いくつかの一次独立な $\mathbb{K}^n$ があれば，そこに元をいくつか付け足して $\mathbb{K}^n$ の基底が構成できるということを学んだ．この節では，次に『基底が与えられた場合に，そこから正規直交基底を得る方法』について学ぶ．これは，**グラム・シュミットの直交化法**と呼ばれる方法である．

正規直交基底とは『各元の大きさが全て 1 で，互いに直交するベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底』のことであった．ここで，正規直交基底を作ろうと思ったときに難しい部分は『互いに直交する n 個の元』を作る部分である．それさえできてしまえば，各元の大きさを 1 にするという部分は，各元を適当にスカラー倍して大きさを調整すれば良いだけなので容易である．よって，良く理解するべき部分は『如何にして一般の基底から互いに直交する n 個の元を作るか』というところである．一般的な方法は後に回して，例で考えよう (この例は一般的な状況を十分に説明していると言える).

例 1. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ という $\mathbb{R}^3$ の部分集合は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．($\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right| = -2 \neq 0$ より，B は 3 つの一次独立なベクトルからなる集合である．) ここから正規直交基底を作ってみよう．

$$\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．まず，

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく．すると，

$$\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_1' \cdot \left(\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' \right) = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1') = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$$

となるので，$\boldsymbol{u}_1'$ と $\boldsymbol{u}_2'$ は直交する．次に，

$$\boldsymbol{u}_3' \coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}\boldsymbol{u}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-7/2}{3/2}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

とすると，$\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_1' = 0$ より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_3' &= \boldsymbol{u}_1' \cdot \left(\boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}\boldsymbol{u}_2' \right) \\
&= \boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1') - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_2') \\
&= \boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3 - 0 = 0, \\
\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_3' &= \boldsymbol{u}_2' \cdot \left(\boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}\boldsymbol{u}_2' \right) \\
&= \boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_1') - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2') \\
&= \boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3 - 0 - \boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3 = 0
\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{u}_3'$ は $\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ と直交する．以上より，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$ は互いに直交する $\mathbb{R}^3$ の 3 つの元である．よって，後はそれぞれの元の大きさが 1 になるようにスカラー倍で調整すれば正規直交基底が得られるが (それぞれをスカラー倍しても直交性は失われないことに注意)，そのためには，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_k'\|}\boldsymbol{u}_k', \quad k = 1, 2, 3$$

とすればよい．なぜなら，このとき

$$\|\boldsymbol{u}_k\| = \sqrt{\boldsymbol{u}_k\cdot\boldsymbol{u}_k} = \sqrt{\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k\right)\cdot\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k\right)} = \sqrt{\frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|^2}(\boldsymbol{u}'_k\cdot\boldsymbol{u}'_k)} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\sqrt{\boldsymbol{u}'_k\cdot\boldsymbol{u}'_k} = \frac{\|\boldsymbol{u}'_k\|}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} = 1$$

となるためである．具体的に求めると，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{4/3}}\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

となり，$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

例 1 の方針は以下のようにまとめられる：

$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ という一次独立なベクトルが与えられたとき，

1) まず，$\boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1$ の定数倍を適切に引くことで “直交性における余分” を削り，$\boldsymbol{u}'_1$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_2$ を作る．
2) 次に，$\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2$ の定数倍を適切に引くことで “直交性における余分” を削り，$\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_3$ を作る．
3) 次に，$\boldsymbol{v}_4$ から $\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2,\boldsymbol{u}'_3$ の定数倍を適切に引くことで “直交性における余分” を削り，$\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2,\boldsymbol{u}'_3$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_4$ を作る．

$\cdots$

$n-1$) 次に，$\boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{u}'_1,\dots,\boldsymbol{u}'_{n-1}$ の定数倍を適切に引くことで “直交性における余分” を削り，$\boldsymbol{u}'_1,\dots,\boldsymbol{u}'_{n-1}$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_n$ を作る．

n) ここまでのステップで，互いに直交する n 個の元が作れているので，後は，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k,\quad k=1,\dots,n$$

として，すべての元の大きさを 1 に調整すれば，$\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_n\}$ が正規直交基底である．

ここでの “直交性における余分” が $\dfrac{(\boldsymbol{u}'_i\cdot\boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{u}'_i\cdot\boldsymbol{u}'_i)}$ という形で与えられることは，例 1 の計算を見れば納得できるだろう (例 1 における直交性の計算では具体的な数字を用いていないことに注意).

このアルゴリズムを厳密な形でも述べておこう．ただし，これで本当に正規直交基底が得られるということの厳密な証明は補足プリントに回すことにする．既に十分納得できたという方は読まなくても良いが，気になる方は一読いただけると良いと思う．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram–Schmidt orthonormalization)

$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，以下の方法で B から $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底を得ることができる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}'_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1, \\
\boldsymbol{u}'_3 &\coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_2 \cdot \boldsymbol{u}'_2)}\boldsymbol{u}'_2, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}'_k &\coloneqq \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_i)}\boldsymbol{u}'_i, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &\coloneqq \boldsymbol{v}_n - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \cdot \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \cdot \boldsymbol{u}'_{n-1})}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_k||}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底.

6.3　実対称行列/エルミート行列の直交行列/ユニタリ行列を用いた対角化

本節では実対称行列は直交行列を用いて，エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化されるということを証明する．既に習ったものもあると思われるが，初めに言葉を思い出しておこう．

定義 6.2

n 次正方行列 A に対し，

$$A^* = {}^t\overline{A} \ (A \text{ を転置し，各成分の複素共役をとったもの})$$

とする．これを A の**随伴行列**と呼ぶ．$(A^*)^* = A$，A の各成分が実数のとき，$A^* = {}^tA$ であることに注意する．また，任意の n 次正方行列 B に対し，$(AB)^* = B^*A^*$ となる．さらに，以下のように定義する．

(1) $A^*A = I_n$ となるとき，A を**ユニタリ行列**という．このとき，$A^* = A^{-1}$ なので，$AA^* = I_n$ でもあることに注意する．

(2) ${}^tAA = I_n$ となるとき，A を**直交行列**という．このとき，${}^tA = A^{-1}$ なので，$A{}^tA = I_n$ でもあることに注意する．また，直交行列 A の各成分が全て実数のとき，A を**実直交行列**という。実直交行列はユニタリ行列でもあることに注意する．

(3) $A^* = A$ となるとき，A を**エルミート行列**という．

(4) ${}^tA = A$ となるとき，A を**対称行列**という．また，対称行列 A の各成分が全て実数のとき，A を**実対称行列**という。実対称行列はエルミート行列でもあることに注意する．

例 2.

- $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -4 & 3i \end{pmatrix}$ のとき，$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & -4 \\ -2i & -3i \end{pmatrix}$ である．
- $A = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ は，ユニタリ行列である．$A^*A = I_3$ は各自確認せよ．

- $A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ は，(実) 直交行列である．${}^tAA = I_3$ は各自確認せよ．
- $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$ は，エルミート行列である．
- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ は，(実) 対称行列である．

次が本節の主定理である．

定理 6.3

A を n 次エルミート行列とする．このとき，以下が成立する．

(1) A の固有値は全て実数である．

(2) A は対角化可能である．

(3) A はあるユニタリ行列 U を用いて対角化できる．つまり，あるユニタリ行列 U が存在して，$U^{-1}AU(=U^*AU)$ が対角行列になる．

定理 6.3 は第 5 回講義資料の 5.1 節 (定理 5.3 参照) での考え方を思い出すと，『エルミート行列はその固有ベクトルで $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底が作れる』という事実も述べている．特に，A の固有空間は $\mathbb{C}^n$ において全て直交している (第 5 回本レポート課題問題 2 参照)．今回は定理 6.3 をとりあえず抽象的に証明し，定理 6.3 (3) のユニタリ行列をどうやって見つけてくるかということは次回解説する．

例 3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすると，U はユニタリ行列で，

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

定理 6.3 の証明. n に関する数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき，$A=(a)$ とすると，$A^*=(\overline{a})$ であるので $A^*=A$ のとき $a=\overline{a}$．よって a は実数で，これが A の固有値なので，(1) は正しい．(2), (3) は $n=1$ のときは自明である．

$(n-1)$ 次エルミート行列に対して定理が成立すると仮定して，n 次エルミート行列 A に対する定理の主張を示す．λ_1 を A の固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の解とする．ただし，この段階では実数解が存在するとは限らないので複素数の範囲で解をとる (代数学の基本定理[*1]より複素数解は常に存在する)．このとき，λ_1 は A の固有値で，固有値 λ の固有ベクトルは少なくとも 1 つは存在するので，そのうち大きさが 1 のものをとって (適当にスカラー倍で大きさを調整する)，$\boldsymbol{u}_1$ とおく (つまり，$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1, \|\boldsymbol{u}_1\| = 1$)．

このとき命題 6.1 より，ある $(n-1)$ 個の $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在して，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底となり，さらにグラム・シュミットの直交化法により，これを正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ にすることができる．ここで，グラム・シュミットの直交化法の手順を思い出すと，得られる正規直交基底の 1 つ目の元は $\boldsymbol{u}_1$ のままであることに注意する．

$U_1 = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2 \cdots \boldsymbol{u}_n)$ とおくと，命題 5.8 より U_1 はユニタリ行列である．ここで，

$$U_1^{-1}AU_1 = (U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_1\ U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_2 \cdots U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 U_1^{-1}\boldsymbol{u}_1\ U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_2 \cdots U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{e}_1\ U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_2 \cdots U_1^{-1}A\boldsymbol{u}_n).$$

[*1] 今はこの定理は認めることにする．

($U_1^{-1}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$ については $\boldsymbol{u}_1 = U_1\boldsymbol{e}_1$ からわかる．) よって，行列の形で書くと，

$$U_1^{-1}AU_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{6.3}$$

となることがわかる．また，$A^* = A, U_1^* = U_1^{-1}$ なので，

$$(U_1^{-1}AU_1)^* = U_1^*A^*(U_1^{-1})^* = U_1^*A^*(U_1^*)^* = U_1^{-1}AU_1 \tag{6.4}$$

となるため，$U_1^{-1}AU_1$ もエルミート行列である．これより，(6.3) において，

- λ_1 は実数 ($\overline{\lambda_1} = \lambda_1$ とならないといけないため)，
- $a_2 = \cdots = a_n = 0$，
- A_2 は $(n-1)$ 次エルミート行列，

となることがわかる．ここで，帰納法の仮定より，あるユニタリ行列 U_2 と実数 $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が存在して，

$$U_2^{-1}A_2U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$U = U_1 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とすると，U は n 次ユニタリ行列で (計算は容易である．各自確認せよ．一般にユニタリ行列の積はユニタリ行列である．)，

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1} U_1^{-1}AU_1 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2^{-1}A_2U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．これにより，n 次エルミート行列の場合に (1)，(2)，(3) が全て示された． □

定理 6.3 の “実バージョン” も以下のように得られる．実対称行列はエルミート行列の特別な場合なので，どこが新しい部分なのか一見見逃しがちであるが，(3) の U として実直交行列がとれるというのが新しい部分である．

定理 6.4

A を n 次実対称行列とする．このとき，以下が成立する．

(1) A の固有値は全て実数である．
(2) A は対角化可能である．
(3) A はある実直交行列 U を用いて対角化できる．つまり，ある実直交行列 U が存在して，$U^{-1}AU(= {}^tUAU)$ が対角行列になる．

証明は定理 6.3 の証明と全く同じである．複素共役を全て忘れれば良い．ただし，今回は定理 6.3 を既に証明しているため，証明中の λ_1 を取るところで λ_1 が既に実数の範囲で取れることがわかっていることがポイントである．これにより，A が実行列であることと合わせて，固有値 λ_1 の固有ベクトルを $\mathbb{R}^n$ から取ってくることができることがわかり，上の証明中を全て実数の範囲で行うことができることがわかる．実ユニタリ行列は直交行列なので，これで定理 6.4 が得られる．

定理 6.4 は第 5 回講義資料の 5.1 節 (定理 5.3 参照) での考え方を思い出すと，『実対称行列はその固有ベクトルで $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が作れる』という事実も述べている．特に，A の固有空間は $\mathbb{R}^n$ において全て直交している．

例 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，A は実対称行列である．A の固有多項式は

$$\Phi_A = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix} \right| = t^2 - 2 = (t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

より，A の固有値は $\pm\sqrt{2}$ である．
$\mathbb{R}^2$ における固有値 $\sqrt{2}$ の固有空間を求めると，

$$V(\sqrt{2}) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

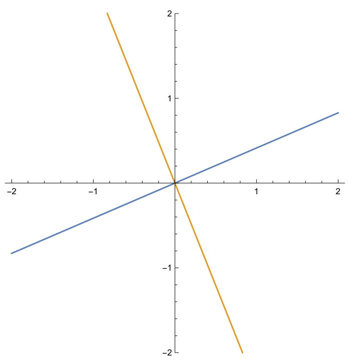
$\mathbb{R}^2$ における固有値 $-\sqrt{2}$ の固有空間を求めると，

$$V(-\sqrt{2}) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

となるが，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2}-1) \cdot (-\sqrt{2}-1) = 1 + (-1) = 0$$

となるので，固有空間 $V(\sqrt{2})$ と $V(-\sqrt{2})$ は $\mathbb{R}^2$ において確かに直交している (下のグラフの青が $V(\sqrt{2})$，黄色が $V(-\sqrt{2})$)．



線形代数 II 第 7 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

6.3 節では以下の事実を証明した．

定理 6.3 (再掲)

A を n 次エルミート行列とする．このとき，以下が成立する．

(1) A の固有値は全て実数である．
(2) A は対角化可能である．
(3) A はあるユニタリ行列 U を用いて対角化できる．つまり，あるユニタリ行列 U が存在して，$U^{-1}AU(=U^*AU)$ が対角行列になる．

定理 6.4 (再掲)

A を n 次実対称行列とする．このとき，以下が成立する．

(1) A の固有値は全て実数である．
(2) A は対角化可能である．
(3) A はある実直交行列 U を用いて対角化できる．つまり，ある実直交行列 U が存在して，$U^{-1}AU(={}^tUAU)$ が対角行列になる．

今回はこれらの定理の (3) で述べられているユニタリ行列/実直交行列 U を見つける具体的な方法を解説する．ここで第 6 回講義資料で学んだグラム・シュミットの直交化法が活躍する．『実対称行列/エルミート行列が実直交行列/ユニタリ行列で対角化できると何が嬉しいのか』ということについては気になるところだと思われるが，次回その応用を解説するので一旦お待ちいただきたい．

7.1 実対称行列/エルミート行列の実直交行列/ユニタリ行列を用いた対角化の具体的な方法

まず，n 次正方行列 A がある正則行列 P をによって対角化可能であるとき，P は A の固有ベクトルを並べて得られる行列となるのであった (命題 3.1)．さらに，命題 5.8 より，$\mathbb{K}^n$ の n 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n$ に関して，

$$\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n \text{を並べてできる } n \text{ 次正方行列 } (\boldsymbol{w}_1\cdots\boldsymbol{w}_n) \text{ が} \begin{cases}\text{実直交行列 } (\mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ のとき})\\ \text{ユニタリ行列 } (\mathbb{K}=\mathbb{C} \text{ のとき}).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n\} \text{ が } \mathbb{K}^n \text{の正規直交基底}$$

という対応があったことを思い出すと，実対称行列/エルミート行列 A を対角化する実直交行列/ユニタリ行列 U を得るということは，結局

『A の固有ベクトルだけを使って $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底を作る』

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

ということになる (作ってしまえばあとはそれを並べれば求める実直交行列/ユニタリ行列である).

ここで，一般論である定理 6.3, 6.4 から n 次の実対称行列/エルミート行列 A についてはその固有ベクトルだけを使って $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が作れるということは保証されている．A が固有値として λ, λ' ($\lambda \neq \lambda'$) を持ち，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ のうち，固有値 λ に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{u}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_k}$，固有値 λ' に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{u}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{j_\ell}$ であったとする．このとき，対角化の際の固有ベクトルの取り方を思い出すと，A の固有値 λ, λ' に対応する固有空間 $V(\lambda), V(\lambda')$ はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
V(\lambda) &= \{c_1\boldsymbol{u}_{i_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_{i_k} \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\} \\
V(\lambda') &= \{c'_1\boldsymbol{u}_{j_1} + \cdots + c'_\ell\boldsymbol{u}_{j_\ell} \mid c'_1, \ldots, c'_\ell \in \mathbb{K}\}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．ここで，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は正規直交基底なので，特に任意の $1 \leq s \leq k, 1 \leq t \leq \ell$ に対し，

$$\boldsymbol{u}_{i_s} \cdot \boldsymbol{u}_{j_t} = 0$$

となるから，任意の元 $c_1\boldsymbol{u}_{i_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_{i_k} \in V(\lambda), c'_1\boldsymbol{u}_{j_1} + \cdots + c'_\ell\boldsymbol{u}_{j_\ell} \in V(\lambda')$ に対し，

$$(c_1\boldsymbol{u}_{i_1} + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_{i_k}) \cdot (c'_1\boldsymbol{u}_{j_1} + \cdots + c'_\ell\boldsymbol{u}_{j_\ell}) = \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{\ell} \overline{c_s}c'_t(\boldsymbol{u}_{i_s} \cdot \boldsymbol{u}_{j_t}) = 0$$

となることがわかる (内積の性質については命題 5.6 参照)．つまり，$V(\lambda)$ と $V(\lambda')$ から任意に 1 つづつ元をとってきたとき，これらは直交するということである．これより，

固有空間 $V(\lambda)$ と $V(\lambda')$ は直交している

ということがわかる．定理の形でまとめておこう[*1]．

定理 7.1

A を n 次の実対称行列 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき)/エルミート行列 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき) とする．このとき，A の 2 つの異なる固有値 λ, λ' に対応する固有空間をそれぞれ $V(\lambda), V(\lambda')$ とすると，$\mathbb{K}^n$ において $V(\lambda)$ と $V(\lambda')$ は直交する．

さて，定理 7.1 から実対称行列/エルミート行列の異なる固有値に対応する固有空間は自動的に直交するということがわかった．このため，正規直交基底を作りたいのであれば，各固有空間から固有ベクトルを選んでくる際に毎回直交するベクトルを選んでくれば良いということになる．実際にはいきなり直交するベクトルを選んでくるのは難しいので，

- まず固有空間から一次独立なベクトルを選んできて，その後グラム・シュミットの直交化法によって直交化させる

という手続きをとれば良い．ここで，グラム・シュミットの直交化法の具体的な手順を思い出すと，これは大まかに言えば「初めに準備したベクトルの組を用いて足したり引いたりすることで正規直交基底を作る」というような手法だったので，グラム・シュミットの直交化法の過程で固有空間からはみ出してしまう (つまり固有ベクトルでないものができてしまう) ということは起こらないということに注意しよう．

以上をまとめると実対称行列/エルミート行列 A を対角化する実直交行列/ユニタリ行列 U を求める手順は以下のようになる．

(Step 1) 第 4 回講義資料 p.7 以降に述べたアルゴリズムに従って，A の固有空間・固有ベクトルを求める．
(Step 2) 固有値ごとにグラム・シュミットの直交化法を用いて選んできたベクトルを正規直交化する．
(Step 3) Step 2 で得られたベクトルを列ベクトルとして並べれば U が得られる．

[*1] ここでは固有ベクトルからなる正規直交基底の存在を用いて実対称行列/エルミート行列の固有空間の直交性を説明したが，実は正規直交基底の存在を使わなくてもこれらの固有空間の直交性は証明できる．実は第 5 回本レポート課題の問題 2 がこれに対応する話となっており，問題 2 の解答およびその補足解説で解説を書いているので参照してもらいたい．

以下ではいくつか例を見てみよう．

例 1． $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると，A は実対称行列である．A を対角化する実直交行列 U を求めてみよう．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-2)^3 + 0 + 0 - (t-2) - (t-2) - 0 = (t-2)(t-(2+\sqrt{2}))(t-(2-\sqrt{2}))\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $2, 2 \pm \sqrt{2}$ である．

固有値 2 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

次に固有値 $2+\sqrt{2}$ の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$((2+\sqrt{2})I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 $2+\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

次に固有値 $2-\sqrt{2}$ の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$((2-\sqrt{2})I_3 - A_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c\text{ は任意パラメータ})$$

となるので，$2-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

とすると，U は実直交行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ となる．

ここでの計算からもわかるように，『グラム・シュミットの直交化法を使う』とは言いながら重複度が 1 の固有値の固有空間に関しては選んでくるベクトルはただ 1 つなので，ただ大きさを 1 に調整すれば良いということになる．特にこの例のように n 次実対称行列/エルミート行列 A が相異なる n 個の固有値を持つ場合には，各固有空間から大きさ 1 のベクトルを選んでくれば自動的に実直交行列/ユニタリ行列が得られるということになる．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，A は実対称行列である．A を対角化する実直交行列 U を求めてみよう．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-1 & -4 & -4 \\ -4 & t-1 & -4 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-1)^3 + (-64) + (-64) - 16(t-1) - 16(t-1) - 16(t-1) \\ &= t^3 - 3t^2 - 45t - 81 = (t+3)^2(t-9) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -3(重複度 2)$, 9$ である．

固有値 -3 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-3I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2\text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -3 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取

れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{R}^3$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する．まず，

$$\boldsymbol{u}_1' \coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

次に固有値 9 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(9I_3 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 9 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，U は直交行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ となる．

例 3. $A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，A はエルミート行列である．A を対角化するユニタリ行列 U を求めてみよう．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t & i & -i \\ -i & t & 1 \\ i & 1 & t \end{pmatrix}\right| \\ &= t^3 + (-1) + (-1) - t - t - t = (t+1)^2(t-2) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 2), 2 である．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ -i & -1 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{C}^3$ のエルミート内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する．まず，

$$\boldsymbol{u}_1' \coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ のエルミート内積に関する大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-i)i + 1^2 + 0^2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(i/2)(-i/2) + (1/2)^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

次に固有値 2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのはエルミート内積に関する大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-i)i + (-1)^2 + 1^2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，U はユニタリ行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

線形代数 II 第 8 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

今回は対角化に関する一連の講義の最終回として，対角化の 2 次形式の分類への応用について述べる[*1]．

8.1　2 次形式

定義 8.1

n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する実数係数の 2 次斉次式[*2]のことを，**(実)2 次形式**という．つまり，具体的には，二次形式はある $a_{ij} \in \mathbb{R}(1 \le i \le j \le n)$ を用いて，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

という形で書ける式のことを (実)2 次形式という．

特に 2 変数，3 変数 (つまり $n = 2, 3$) の場合の 2 次形式を考えてみよう．これはそれぞれ，

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2$$
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$$

という多項式のことである．特に $n = 2$ の場合に $a = a_{11}, b = a_{12}, c = a_{22}, x = x_1, y = x_2$ と書くことにすると，x, y に関する多項式

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

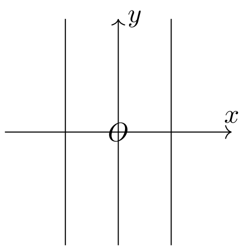
は高校以来馴染みのある多項式であろう．例えば，2 次形式を用いて以下のような図形を表すことができる．

例 1 ($n = 2$ の場合，2 次曲線)**.** 2 次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ に対し，

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

とすると，これは xy-平面内の 2 次曲線と呼ばれる曲線を表す．

まず最も単純な場合として，$x^2 = 1(a = 1, b = 0, c = 0)$ という場合を見てみよう．これは，「$x = 1$ 又は $x = -1$」と同値なので，以下のような 2 直線を表す．



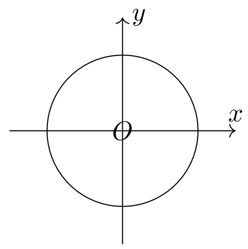
次に $x^2 + y^2 = 1(a = c = 1, b = 0)$ を考えてみると，これは xy-平面内では半径 1 の円を表す．

---

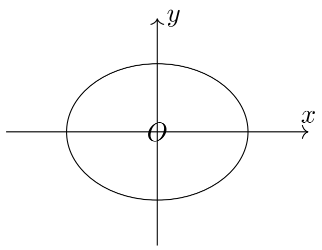
* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

[*1] 次回以降は線形空間論の基礎の内容を扱う．それが順調に進んでもしさらに時間があれば，最終回周辺で再度対角化の更なる応用について解説を行う可能性もある．

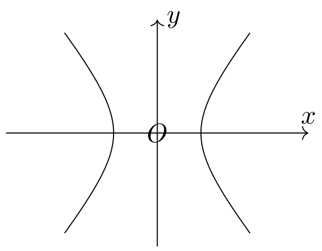
[*2] 斉次式とは全ての項の次数が全て同じ多項式のこと．今の場合は全ての項の次数が 2 である式を考えている．



より一般に $a > 0$ かつ $c > 0$ のとき，$ax^2 + cy^2 = 1$ は xy-平面内では以下のような楕円を表す．



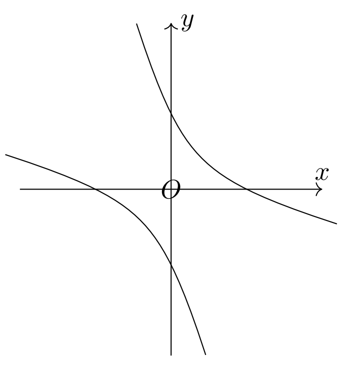
また，$a > 0, c < 0$ のとき，$ax^2 + cy^2 = 1$ は xy-平面内では以下のような双曲線を表す．



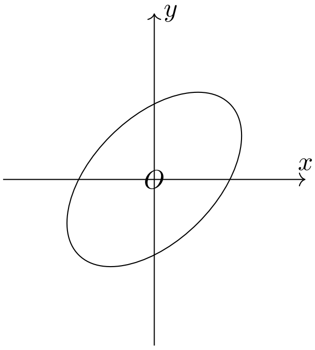
$a < 0, c > 0$ のときは，x と y の役割をいれかえて，この 曲線を $90°$ 回したような曲線になる．

$b = 0$ の場合の最後として，$a \leq 0, c \leq 0$ のときを考えると，$ax^2 + cy^2 = 1$ の左辺は $\mathbb{R}^2$ 内では正の値を取らないので，$\mathbb{R}^2$ においてこれを満たす点は空集合となる．

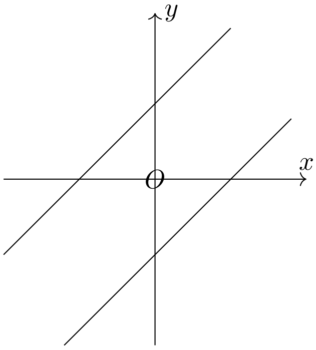
それでは，xy の項がある場合 $(b \neq 0)$ にはグラフの概形はどうなるだろうか．例えば，$x^2 + 4xy + y^2 = 1$ は以下のように双曲線を回転させたグラフになる．



一方，関数の見た目は同じようでも $x^2 - xy + y^2 = 1$ は以下のように楕円を回転させたグラフになる．



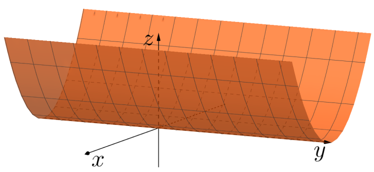
さらに，$x^2 - 2xy + y^2 = 1$ は以下のように 2 本の平行な直線となる．

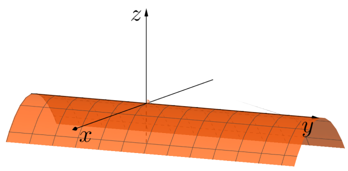


このように，多項式の見た目はほぼ同じでもそのグラフの形は様々である．実は一般に $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ のグラフは，2 本の平行な直線，楕円 (円を含む)，双曲線，空集合のいずれかの形をしている．今回はこのことを対角化の理論を応用して示す (定理 8.3)．

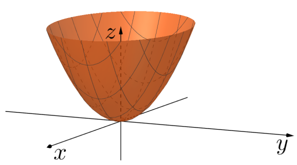
例 2 ($n = 2$ の場合，2 次曲面)**.** 例 1 では $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ という 2 次曲線の概形を見たが，xyz-空間内での 2 次曲面 $z = ax^2 + bxy + cy^2$ の概形も重要であるのでここに書いておこう[*3]．以下は $b = 0$ の場合の曲面の概形である．何故このようになるかすぐにはわからないという方も，一旦 x, y, z のいずれかの値を様々に固定してみることで，曲面の切断面が描けて概形が想像できるだろう．

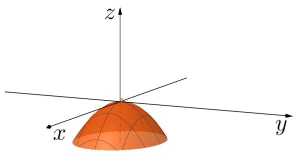
- 放物柱面：$z = ax^2$ (左：$a > 0$，右：$a < 0$)：





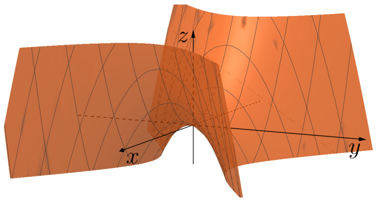
- 楕円放物面：$z = ax^2 + cy^2$ (左：$a > 0, c > 0$，右：$a < 0, c < 0$)：





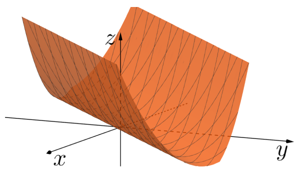
[*3] ここでの絵は GeoGebra というアプリを用いて書いたものである．Web 上で無料で簡単に使えるので，遊んでみると良い．URL：`https://www.geogebra.org/`

- 双曲放物面：$z = ax^2 + cy^2$ $(a > 0, c < 0,)$：

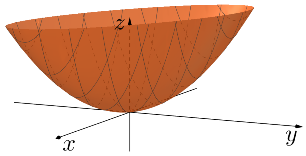


以下で対角化の理論を応用することで，2 次曲面 $z = ax^2 + bxy + cy^2$ の概形は必ず上に挙げた $b = 0$ の場合のいずれかの曲面を z 軸周りに回転させて得られるものとなるということを証明する (定理 8.3)．つまり，言い換えれば 2 次曲面の本質的な形は上に挙げたもので全てであることがわかる．以下が例である．

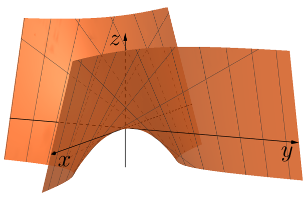
- $z = x^2 - 2xy + y^2$ (上の $a > 0, c = 0$ の場合のものを回転させた形)：



- $z = 2x^2 + 4xy + 3y^2$ (上の $a > 0, c > 0$ の場合のものを回転させた形)：



- $z = xy$ (上の $a > 0, c < 0$ の場合のものを回転させた形)：



2 次形式で定められる曲面

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

を考えたとき，概形を知るうえで難しい部分は $\sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j$ の部分である．実際，例 1, 2 でも『xy』の部分が無ければ “回転していなくて綺麗” なグラフが得られていた．変数を 1 つ増やして 3 変数の場合にもこの様子を見ておこう．$\mathbb{R}^4$ の中で

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ と } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

を比べてみる．このとき，$x_3 = 0, 1, 2$ と動かしてみると，前者は

$$z = x_1^2 + x_2^2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 1, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 4$$

と単に z 方向への平行移動の形で変わっていくのに対し，後者は

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 4 + x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2$$

というように関数が単に z 方向の平行移動ではない形で変わっていく．この違いが $\sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$ の部分が無いと "回転していなくて綺麗" になるという事実に対応している．

今から述べたいことは $x_1, \ldots, x_n$ という座標の取り方を変えると $\sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$ の部分が消せるということである．(つまり，2 次形式に合うように座標の方を "回転させる" のである！)

2 次形式

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$$

に対して，以下の n 次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{n-1n}}{2} \\ \frac{a_{1n}}{2} & \cdots & \frac{a_{n-1n}}{2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を考える．つまり，A の (i,j) 成分は

$$\begin{cases} a_{ii} & i = j \text{ のとき}, \\ a_{ij}/2 & i < j \text{ のとき}, \\ a_{ji}/2 & i > j \text{ のとき}, \end{cases}$$

である．このとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると，

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と書けることが計算によりわかる (わかりにくい場合には以下の例 3，4 を先に見るとイメージがつかめるだろう)．ここで，A は n 次実対称行列なので，第 6 回講義資料定理 6,4 より，ある実直交行列 U が存在して，

$${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ ただし}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{は実数}$$

というように対角化できる．これより，

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = U^{-1}\boldsymbol{x} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \\ &= {}^t(U\boldsymbol{x}')AU\boldsymbol{x}' \\ &= {}^t\boldsymbol{x}'{}^tUAU\boldsymbol{x}' \\ &= (x_1' \ \cdots \ x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_1(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \end{aligned}$$

となる．ここで最後の式は『$\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j$ の部分』がなくなっていることに注意しよう．これを 2 次形式の標準形という．ここでの結果を定理の形でまとめておこう．

定理 8.2

A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，A を対角化するある実直交行列 U が存在して，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = U^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 $$

となる．ただし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は

$$ U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} $$

を満たす実数 (A の固有値).

この定理の意味を考えてみよう．U の第 i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ と書くことにする (つまり $U = (\boldsymbol{u}_1\ \cdots \boldsymbol{u}_n)$) と，$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$ より，

$$ \boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{u}_1 + x_2'\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n'\boldsymbol{u}_n $$

となる．ここで，第 5 回講義資料 p.2 の考え方を思い出すと，これは正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ をもとに $\mathbb{R}^n$ の “新たな座標” を考えたとき，$\mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{x}$ が新たな座標では $\boldsymbol{x}'$ に対応するということを言っている．つまり，定理 8.2 はどんな 2 次形式も適切に座標を取り直してみれば標準形に見えるということを言っている．

$n = 2$ の場合を再び考えてみよう．2 次実直交行列は $\mathbb{R}^2$ 内の正規直交基底を並べてできる行列なので，図形的に考えてみれば明らかであるように[*4]，

$$ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}) $$

のいずれかの形をしている．特に 2 つめのものは 1 つめのものの第 2 列を -1 倍しただけなので，2 つめのものが実対称行列 A を対角化するとき，1 つめものも A を対角化する (なぜなら，2 つめの 2 列目が A の固有ベクトルであるとき，1 つめの 2 列目もそうであるからである)．よって，2 次の場合実対称行列 A は必ず $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ という形の行列で対角化できる．これは，2 次形式

$$ (x \quad y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} $$

は $\mathbb{R}^2$ 内の x 軸，y 軸をそれぞれ θ 回転させた座標軸で見ると標準形となるということを言っている．さらに A の固有値を λ_1, λ_2 とすると，その標準形は

$$ \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 $$

という形をしており，例 1，2 で見たように，$\lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 = 1$ や $z = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2$ の概形は λ_1, λ_2 の符号のみで決まっている．よって，A の固有値の符号がわかれば $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$，あるいは

[*4] もちろん計算で示しても容易に示せる．

$z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の概形もわかるということになる．以上を例で見てみよう．

例 3. 2 次形式 $x^2 + 4xy + y^2$ を考える．このとき，実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると，

$$x^2 + 4xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．ここで，A を対角化する実直交行列を第 7 回講義資料の方法で求めよう． A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-1)^2 - (-2)^2 = (t+1)(t-3) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-1, 3$ である．

固有値 -1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(-I_2 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

次に固有値 3 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(3I_2 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 3 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}$$

とすると，U は実直交行列で ${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

よって，

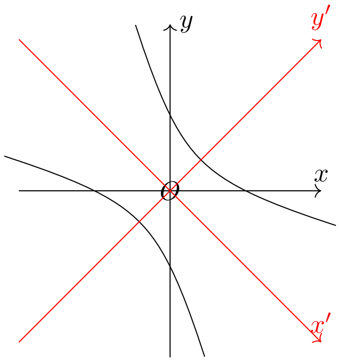
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & \sin(-\pi/4) \\ -\sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4)x+\sin(-\pi/4)y \\ -\sin(-\pi/4)x+\cos(-\pi/4)y \end{pmatrix}$$

とおくと，

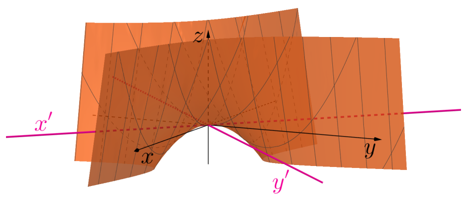
$$x^2+4xy+y^2 = -(x')^2+3(y')^2$$

となる．これは，x 軸，y 軸をそれぞれ $-\pi/4$ 回転させた新しい座標軸を考えると，その座標軸ではこの二次形式は $-(x')^2+3(y')^2$ に見えるということを言っている．実際に $-(x')^2+3(y')^2=1$，および $z=-(x')^2+3(y')^2$ というグラフを考えてみると以下のようになる．

- $-(x')^2+3(y')^2 = x^2+4xy+y^2 = 1$：



- $z = -(x')^2+3(y')^2 = x^2+4xy+y^2$：



例 4. 2 次形式 x^2-xy+y^2 を考える．このとき，実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると，

$$x^2-xy+y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．ここで，A を対角化する実直交行列を第 7 回講義資料の方法で求めると (長いので計算は略．各自試してほしい．)，

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin\quad(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

としたとき，${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ となる．

よって，

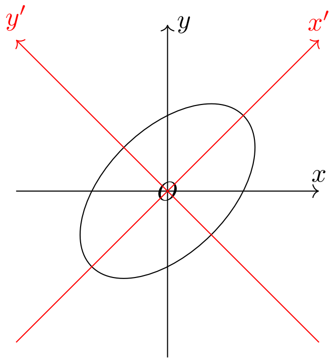
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4)x+\sin(\pi/4)y \\ -\sin(\pi/4)x+\cos(\pi/4)y \end{pmatrix}$$

とおくと，

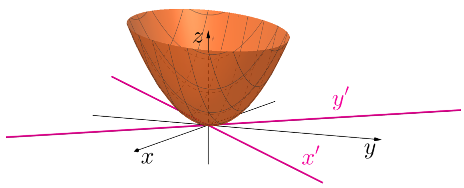
$$x^2-xy+y^2 = \frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2$$

となる．これは，x 軸，y 軸をそれぞれ $\pi/4$ 回転させた新しい座標軸を考えると，その座標軸ではこの二次形式は $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2$ に見えるということを言っている．実際に $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=1$，および $z=\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2$ というグラフを考えてみると以下のようになる．

- $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=x^2-xy+y^2=1$：



- $z=\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=x^2-xy+y^2$：



以上の概形の考察を定理の形でまとめておこう．

定理 8.3

実 2 次形式 $B(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$(ただし，$a=b=c=0$ ではないとする) に対して，

$$A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

とする．A は実対称行列なので実数の固有値 λ_1,λ_2(ただし，$\lambda_1\geq\lambda_2$ とする) を持つが，その符号によって以下が言える：

(i) $\lambda_1>0,\lambda_2=0$ のとき，$B(x,y)=1$ は 2 本の平行な直線，$z=B(x,y)$ は下に凸な放物柱面となる．

(i)$'$ $\lambda_1=0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は空集合，$z=B(x,y)$ は上に凸な放物柱面となる．

(ii) $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ のとき，$B(x,y)=1$ は楕円，$z=B(x,y)$ は下に凸な楕円放物面となる．

(ii)$'$ $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は空集合，$z=B(x,y)$ は上に凸な楕円放物面となる．

(iii) $\lambda_1>0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は双曲線，$z=B(x,y)$ は双曲放物面となる．

このように，2 次形式の標準形において，対応する実対称行列の符号は特に重要な意味を持つ．一般に，A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 $B(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考え，その標準形が

$$\lambda_1(x_1')^2+\lambda_2(x_2')^2+\cdots+\lambda_n(x_n')^2$$

となったとき，$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ の中で正のものの数，負のものの数，0 の数を順に p,q,r として，(p,q,r) を 2 次形式 $B(\boldsymbol{x})$ の**符号数**という．例えば，例 3，4 での計算により，$x^2+4xy+y^2$ の符号数は $(1,1,0)$，x^2-xy+y^2 の符号数は $(2,0,0)$ である．

符号数が A の固有値の符号の情報を持っているものであると考えれば以下の命題は容易にわかる．

命題 8.4

A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 $B(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，$B(\boldsymbol{x})$ の符号数を (p, q, r) とすると，以下が成立する．

(1) $r \geq 1 \Leftrightarrow \det A = 0$.

(2) $p = n, q = r = 0 \Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$B(\boldsymbol{x}) \geq 0$，かつ等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ」.

(3) $q = n, p = r = 0 \Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$B(\boldsymbol{x}) \leq 0$，かつ等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ」.

定義 8.5

n 変数 2 次形式 $B(\boldsymbol{x})$ の符号数を (p, q, r) とかく．

(1) $r = 0$ のとき，つまり，対応する実対称行列が正則なとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**非退化**であるといい，$r \geq 1$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**退化**しているという．

(2) $p = n, q = r = 0$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**正定値**であるという．

(3) $q = n, p = r = 0$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**負定値**であるという．

定理 8.3 の条件も符号数の言葉を用いれば，

- (i) は符号数が $(1, 0, 1)$ のとき，(i)$'$ は符号数が $(0, 1, 1)$ のとき (いずれも退化している)
- (ii) は符号数が $(2, 0, 0)$ のとき，つまり正定値のとき，
- (ii)$'$ は符号数が $(0, 2, 0)$ のとき，つまり負定値のとき，
- (iii) は符号数が $(1, 1, 0)$ のとき

ということができる．さらに，$n = 2$ の場合には符号数は固有値を具体的に計算しなくてもすぐにわかる．2 次実対称行列を $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ とすると，A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{pmatrix} \right| = (t-a)(t-c) - (-b/2)^2 = t^2 - (a+c)t + (ac - (b/2)^2) = 0$$

であり，この 2 解が A の固有値 λ_1, λ_2 である．よって，解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c = \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda_1\lambda_2 = ac - (b/2)^2 = \det(A) \end{cases}$$

である (第 3 回講義資料注意 1 参照)．これより，二次形式 $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に関して，

- 定理 8.3 の (i) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(1, 0, 1) \Leftrightarrow \det(A) = 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) > 0$,
- 定理 8.3 の (i)$'$ $\Leftrightarrow$ 符号数が $(0, 1, 1) \Leftrightarrow \det(A) = 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) < 0$,
- 定理 8.3 の (ii) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(2, 0, 0) \Leftrightarrow \det(A) > 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) > 0$,
- 定理 8.3 の (ii)$'$ $\Leftrightarrow$ 符号数が $(0, 2, 0) \Leftrightarrow \det(A) > 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) < 0$,
- 定理 8.3 の (iii) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(1, 1, 0) \Leftrightarrow \det(A) < 0$,

ということがわかる．以上をまとめると，$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ あるいは，$z = ax^2 + bxy + cy^2$ の形状が知りたければ，対応する実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ のトレース $\mathrm{Tr}(A)$ と行列式 $\det(A)$ の符号だけ計算すれば良い

ということになる．例えば，$x^2+4xy+y^2$ に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-2^2=-3<0$$

なので，$x^2+4xy+y^2=1$ は双曲線，$z=x^2+4xy+y^2$ は双曲放物面であることがわかる．(ただし，標準形からどれくらい回転されているかを知るためには対角化に用いる実直交行列を求める必要がある．)

x^2-xy+y^2 に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-(-1/2)^2=3/4>0 \quad \mathrm{Tr}(A)=1+1=2>0$$

なので，$x^2-xy+y^2=1$ は楕円，$z=x^2-xy+y^2$ は下に凸な楕円放物面であることがわかる．

$x^2-2xy+y^2$ に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-(-1)^2=0 \quad \mathrm{Tr}(A)=1+1=2>0$$

なので，$x^2-2xy+y^2=1$ は 2 本の平行な直線，$z=x^2-2xy+y^2$ は下に凸な放物柱面であることがわかる．

微積分学との関係

最後になぜこの 2 次曲面の概形を知ることが大事なのか微積分学で習う 2 変数の極値問題との関係から簡単に述べておこう．無限回微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の周りで，

$$f(a+s,b+t)\approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)s+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2$$

と近似されるのであった．(“近似される” の正確な意味については 2 変数版のテイラーの定理を思い出すこと．)

ここで，x,y を $\mathbb{R}$ 内で動かしたときの $z=f(x,y)$ の極大，極小値が知りたいとする．まず，極大，極小値をとる点では曲面 $z=f(x,y)$ は “山の頂上” あるいは “凹みの底” となっているはずなので，このような点 (a,b) では

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \tag{8.1}$$

となるはずである (正確な議論は微積分学の教科書を参照のこと．1 変数の場合に極大極小値が微分係数 $=0$ の点で見つかったことを思い出せばよい)．そのため，極値問題では (8.1) を満たす点 (a,b) をまず計算する．すると，次は求めた (a,b) が $f(x,y)$ を極大にする点なのか，極小にする点なのか，どちらでもないのかを調べないといけない．ここで，今回の 2 次曲面の概形の考察が役に立つのである．上に述べたように (8.1) を満たす点では，$f(f,y)$ は

$$f(a+s,b+t)\approx f(a,b)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right)$$

と近似される．ここで，右辺の $f(a,b)$ は定数なので概形には影響してこないため，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right)$$

の部分に着目する．すると，これは s,t に関する 2 次形式となっている！ (s,t) は点 (a,b) からの差分を表す値なので，$(s,t)=(0,0)$ の周りで曲面

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right) \tag{8.2}$$

がどのようになっているかがわかれば，それが点 (a,b) の周りでの $f(x,y)$ の振る舞いを表していることになる．実際，(8.2) が

(I) 下に凸な楕円放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとり，

(II) 上に凸な楕円放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとり，

(III) 双曲放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値も極小値もとらない

ということになる．(※放物柱面となる場合は，テイラー展開の 3 次以上の項が極値問題に関係してくるので，この場合は 2 次形式の議論だけでは判定できない．)(8.2) の右辺の二次形式に対応する実対称行列は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

であり，1/2 を除いた

$$H(a,b) \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

を f の (a,b) における**ヘッセ行列 (Hessian)** という．今回学んだことから $\det(H(a,b))$ や $\mathrm{Tr}(H(a,b))$ の値を計算することによって，極値問題が解けることがわかるのである．

例 5. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めてみよう．まず

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 3a^2 - 3b = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -3a + 3b^2 = 0 \end{cases}$$

となる点 (a,b) を求める．1 つめの式より，$b = a^2$ なので，2 つめの式に代入して，$0 = -3a + 3a^4 = 3a(a-1)(a^2+a+1)$．よってこの実数解は $a = 0, 1$．これより，上式を満たす点は $(0,0)$ と $(1,1)$ である．さらに，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

より，ヘッセ行列 $H(x,y)$ は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\det(H(0,0)) = 0^2 - (-3)^2 = 9 < 0, \quad \det(H(1,1)) = 6^2 - (-3)^2 = 27 > 0, \quad \mathrm{Tr}(H(1,1)) = 6 + 6 = 12 > 0$$

となるので，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極小値 $f(1,1) = -1$ を持つ．(点 $(0,0)$ では極大値も極小値も取らない (鞍点)．)

線形代数 II 第 9 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

9.1 導入

今回からはベクトル空間 (= 線形空間) の理論の基礎を学ぶ．ベクトル空間はこれまで扱ってきた $\mathbb{K}^n$ の抽象化であり，この抽象化によって，様々な空間に対してこれまでに学んだ $\mathbb{K}^n$ での理論が適用できるようになり，線形代数の応用範囲が一気に広がってゆく．

アイデアを簡単に説明しよう．$\mathbb{K}^n$ とはいわば "座標付き空間" であった．任意の点は座標を用いて表すことができる．しかし，我々が既に対角化の勉強で見てきたように，この初めから備わっている "標準的な座標" はいつでも便利なわけではなかった．例えば，第 5 回講義資料 5.1 節では，対角化可能な n 次正方行列 A に対して『A の固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底』をとり，そこから定まる "新たな座標" を考えることで，$\mathbb{K}^n$ において A を左から掛ける一次変換が非常に見やすくなったのである (A を n 回掛けるような操作も容易に計算できた！)．このように，"空間" と "座標" を別に考えて，"空間" にその都度便利な "座標" を取れるというような数学的枠組みがあれば便利なことがある．そこで，"空間" と "座標" を分けて考えようというのがここから扱う話で，<u>"空間" の抽象化がベクトル空間</u>であり，<u>"座標" の抽象化が基底</u>となる．これはある意味では自然な発想で，空間というのは別に座標軸が無くても存在すると言うのは受け入れられることなのではないだろうか (例えば我々が住んでいる 3 次元空間において座標軸を実際に見たことがあるという方はいないだろう[*1])．実際，ベクトル空間の定義においては "座標" は出てこない．しかし，何の条件もなければ何も数学が展開できないので，ベクトル空間の理論では和『+』とスカラー倍『・』というベクトルにおける基本操作ができる構造が空間に備わっていることを仮定する．これは大まかに言えば "まっすぐな (= 線形な！) 空間" を考えるということに対応する[*2]．

9.2 ベクトル空間

それでは早速ベクトル空間の定義を述べよう．以下は非常に長い定義であるが，混乱しそうになったら V を $\mathbb{K}^n$，『+』，『・』を普通のベクトルの和とスカラー倍だと思って読めば良い．そうすると，これらは $\mathbb{K}^n$ において，普通のベクトルの和とスカラー倍が満たすべき当たり前の性質をただ仮定しているだけだということがわかると思われる．

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 どこかにあるのであれば見てみたい．

*2 空間と座標を分けるという考え方は幾何で習う『多様体論』にも通じる考え方で，現代の数学において非常に重要な考え方である．多様体においては，和やスカラー倍の構造は考えない代わりに，"曲がった空間" が扱えるようになる．

定義 9.1

3 つ組 $(V, +, \cdot)$ が $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間**であるとは，これが以下のような 3 つ組であることである：

- V は空でない集合，
- $+$ は写像 $+ \colon V \times V \to V$ (**和**と呼ばれる．元の対応は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ と書く)．
- $\cdot$ は写像 $\cdot \colon \mathbb{K} \times V \to V$，(**スカラー倍**と呼ばれる．元の対応は $(c, \boldsymbol{v}) \mapsto c\boldsymbol{v}$ と書く)．

であって，以下が成立する：

(v1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,
(v2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$,
(v3) ある元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$，(この $\boldsymbol{0}$ を**零元**という)
(v4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，ある元 $-\boldsymbol{v} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，(この $-\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$ の**逆元**という)
(v5) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(c + d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$,
(v6) 任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$,
(v7) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(cd)\boldsymbol{v} = c(d\boldsymbol{v})$,
(v8) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

また，ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ に対し，写像 $+, \cdot$ が明らかな場合には，単に V をベクトル空間という．

注意 1 (ベクトル空間の定義条件 (v2) に関する注釈)．ベクトル空間の条件 (v2) は**結合法則**と呼ばれ，これにより和を取る順番を変えても結果が変わらないということが導かれる．例えば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V$ に対し，$((\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_4$ と $(\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4))$ は一致するということが以下のようにして (v2) を繰り返し使うことによってわかる．(逆に言えばこれは (v2) を仮定しているから示されることであって，“当たり前” ではないということに注意する)．

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_4 &= (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) \quad ((\text{v2}) \text{ で } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_4 \text{とした}) \\ &= \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4)) \quad ((\text{v2}) \text{ で } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 \text{とした})\end{aligned}$$

一般に，(v2) を繰り返し使えば，どのように括弧を付けても全て答えが一致することが示される．この証明は講義では扱わないが，興味のある方は腕試しとして是非チャレンジしてみて欲しい[*3]．これより，ベクトル空間 V における演算『$+$』に対しては，以下では特に 2 つずつ括弧を付けることはしない．例えば，V において，

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i$$

というような書き方をすることにする．また，(v1) より和の並べ方も任意で良いということがわかるだろう．特に，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ も成立することに注意する．

V の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\mathbb{K}$ の元 $c_1, \ldots, c_n$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

という形の和を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の**一次結合**という．

例 1. $\mathbb{K}^n$ は以下の普通の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad c\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}.$$

[*3] 証明を書いたものを私に送っていただければ添削はします．演算『$+$』の回数に関する帰納法を用いれば良いというのがヒントです．

零元 $\mathbf{0}$ は零ベクトル $\mathbf{0}$ である．また，$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ に対して，$-\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ である．

例 2. $\mathbb{K}$ の元を係数とする 1 変数多項式全体のなす集合

$$\mathbb{K}[x] \coloneqq \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

を考える．このとき，$\mathbb{K}[x]$ は以下の普通の多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる：

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \\
&c(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = ca_0 + ca_1 x + \cdots + ca_n x^n.
\end{aligned}$$

零元 $\mathbf{0}$ は 0(定数項 0 のみの多項式) である．また，$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ に対して，

$$-(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$$

である．

例 3. $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列全体のなす集合

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{K} \ (i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n) \right\}$$

を考える．このとき，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は行列の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．

零元 $\mathbf{0}$ は零行列 (全ての成分が 0 の行列) である．また，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対して，

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

である．

例 4. $\mathbb{R}$ 上の連続な実数値関数全体 $C^0(\mathbb{R})$ のなす集合

$$C^0(\mathbb{R}) \coloneqq \{f(x) \mid f(x) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上連続な実数値関数 }\} = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続 }\}^{*4}$$

を考える (例えば，$1 + x, \ \sin x, \ e^x \in C^0(\mathbb{R})$)．このとき，$C^0(\mathbb{R})$ は関数の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる ($c \in \mathbb{R}$)：

$$f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) + g(x), \quad cf \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto cf(x)$$

ここで，f と g が連続であるとき，上の $f+g, cf$ は共に連続であることに注意する (つまり，$f+g, cf \in C^0(\mathbb{R})$)．零元 $\mathbf{0}$ は定数関数 0 である (つまり全ての x での値が 0 の関数)．また，$f \in C^0(\mathbb{R})$ に対して，$-f$ は

$$-f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto -f(x)$$

で定まる関数である．

---

*4 本当は一番右の写像としての書き方が厳密に思われるのであるが，実用上は真ん中のような書き方をされることが多いだろう．$f(x)$ という書き方は見た目にわかりやすいので計算をするうえで便利であるという反面，$f(x)$ と書いたときに「関数 $f(x)$」を表しているのか，「写像 f に x という値を代入した時の値 (数字)」を表しているのか見た目からはわからないという問題がある．

例 5. フィボナッチ型の漸化式を満たす $\mathbb{K}$ の元からなる数列全体のなす集合

$$F \coloneqq \{(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}, 任意の\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} に対し，a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$$

を考える (例えば，$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in F$)．このとき，$F$ は以下の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる：

$$\begin{aligned}
&(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots) \\
&c(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \dots)
\end{aligned}$$

ここで，上の右辺がそれぞれ F の元になっていることは次のように確かめられる：
任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&a_{n+2} + b_{n+2} = (a_n + a_{n+1}) + (b_n + b_{n+1}) = (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1}), \\
&ca_{n+2} = c(a_n + a_{n+1}) = ca_n + ca_{n+1}.
\end{aligned}$$

このとき，F の零元 $\mathbf{0}$ は全ての項が 0 の数列 $(0, 0, 0, 0, \dots)$ である．また，$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in F$ に対して，

$$-(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \dots)$$

である．なおここでは，『$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$』というフィボナッチ型の漸化式を考えたが，これは一般に

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}\ (c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{K})$$

という形の定数係数斉次線形漸化式に置き換えても同じ議論ができる．

以上のような様々な空間が『ベクトル空間』という枠組みで並行して扱えるというのがこれからの話である．以下は任意のベクトル空間において成り立つ基本的な命題である．

命題 9.2

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき以下が成立する．

(1) V において零元 $\mathbf{0}$ はただ 1 つに定まる．
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，その逆元 $-\boldsymbol{v}$ は V においてただ 1 つに定まる．
(3) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}$．
(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$．

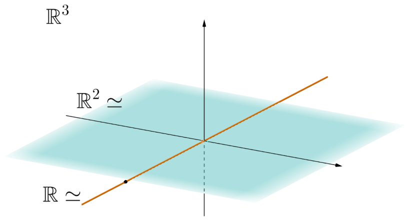
証明.
(1) $\mathbf{0}'$ も V の零元であるとすると，(v1)，(v3) より $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ となり，結局 $\mathbf{0}'$ は $\mathbf{0}$ に一致する．よって，V の零元はただ 1 つである．
(2) $\boldsymbol{v}'$ も $\boldsymbol{v}$ の逆元であるとすると，(v1)，(v2)，(v3) より

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}) + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} + (-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$$

となり，結局 $-\boldsymbol{v}$ に一致する．よって，$\boldsymbol{v}$ の逆元はただ 1 つである．
(3) (v5) より，$0\boldsymbol{v} = (0+0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-0\boldsymbol{v}$ を加えて，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}$．
(4) (v5)，(v8) と (3) より，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-\boldsymbol{v}$ を加えて，$-\boldsymbol{v} = \mathbf{0} + (-1)\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$． □

9.3 部分空間

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ においては 3 番目の座標が 0 になる元の集まりとして自然に 2 次元空間 (平面)$\mathbb{R}^2$ が入っており，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ においては，2 番目の座標が 0 になる元の集まりとして，自然に 1 次元空間 $\mathbb{R}$ が入っていた．



このような『ベクトル空間の中にあるベクトル空間』は一般の状況では部分空間として以下のように定式化される．

定義 9.3

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，V の部分集合 W が V の**部分空間**であるとは，

(s1) $\mathbf{0} \in W$，($\mathbf{0}$ は V の零ベクトル)
(s2) 任意の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ に対し，$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in W$，($W$ は**和で閉じている**という)
(s3) 任意の $c \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$c\boldsymbol{w} \in W$，(W は**スカラー倍で閉じている**という)

が満たされることを言う．

注意 2. ここで『部分集合』と『部分空間』という言葉は違うものであるということをしっかり意識するようにしよう．これらの言葉を混同して使ってしまう事例が頻繁に見られる．部分集合と言うのはもとの集合から単に元をいくつか (無限個かもしれない) 選んできて得られる集合のことであって，部分空間と言うのは上で述べたようにそのような部分集合のうち，さらに (s1)，(s2)，(s3) という条件を満たす特別なもののことを指している．

上に言葉で述べたように部分空間はそれ自体がベクトル空間である．それを正確に主張したのが以下の命題であるが，少し細かい話になるので，混乱しそうという方は証明を一度飛ばして読んでも良い．

命題 9.4

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，W をその部分空間とする．このとき，$(W, +, \cdot)$ は再びベクトル空間となる．ただしここで，$(W, +, \cdot)$ の $+, \cdot$ はそれぞれ V の $+, \cdot$ から定義域を制限して得られる和とスカラー倍とする．

証明． 部分空間の定義条件 (s2)，(s3) より，V の和 $+\colon V \times V \to V$，スカラー倍 $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ はそれぞれ，$+\colon W \times W \to W$，$\cdot : \mathbb{K} \times W \to W$ に制限できることがわかる．これらを W の和とスカラー倍として，W がベクトル空間となっていることを確かめれば良い．

まず，これらは V で定まっていた写像の定義域 (と値域) をそのまま制限して得られる写像なので，V で (v1)，(v2)，(v5)，(v6)，(v7)，(v8) が成立していたことから W においてもこれらが成立することは自明である．また，(s1) より $\mathbf{0} \in W$ であるが，この $\mathbf{0}$ が W においても零元の定義条件 (v3) を満たすことも明らかである．あとは，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し，V での逆元 $-\boldsymbol{w}$ が W の中から取れることを言えば (v4) が成立することがわかる．命題 9.2 の (4) より，$-\boldsymbol{w} = (-1)\boldsymbol{w}$ であるが，部分空間の定義条件 (s3) より，$(-1)\boldsymbol{w} \in W$ である．よって，示すべきことは全て示された． □

例 6. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z = 0 \right\}, \qquad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y = z = 0 \right\}$$

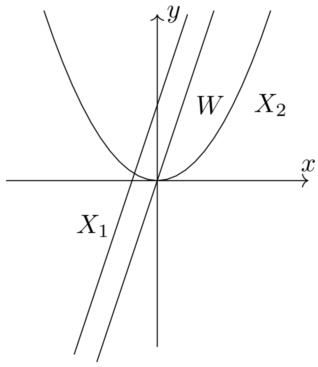
はどちらも $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．これらは定義 9.3 の直前で図示されているものである (水色の部分が W_1，

オレンジの部分が W_2)．これらが部分空間の定義 (s1)，(s2)，(s3) を満たしていることは容易に確かめられるだろう．このように部分空間というのはベクトル空間における直線や平面のような "まっすぐな部分集合" だと思っていれば直感的には間違いではない (和やスカラー倍で閉じるという条件が "まっすぐである" ということを課している)．

例 7. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; -3x + y = 0 \right\}, \qquad X_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; -3x + y = 1 \right\}, \qquad X_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 - y = 0 \right\}$$

という 3 つの部分集合を考えてみると，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であるが，X_1, X_2 は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．



これらは以下のように確かめられる．

<u>W が部分空間であること：</u> W が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを順にチェックすれば良い．

まず，$-3 \cdot 0 + 0 = 0$ となるので，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ となるため，条件 (s1) は満たされる．

次に，任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ をとると，条件より

$$\begin{cases} -3x_1 + y_1 = 0 \\ -3x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

となる．これらより，

$$-3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (-3x_1 + y_1) + (-3x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W$$

となる．よって，条件 (s2) も満たされる．

最後に，任意の $c \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ をとると，条件より $-3x + y = 0$ となることに注意して，

$$-3(cx) + (cy) = c(-3x + y) = c \cdot 0 = 0.$$

よって，

$$c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \in W$$

となる．これより，条件 (s3) も満たされる．以上より，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である．

<u>X_1 が部分空間でないこと：</u> $-3 \cdot 0 + 0 \neq 1$ となるので，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X_1$ となり，条件 (s1) が満たされないため，X_1 は部分空間ではない (ちなみに (s2)，(s3) も満たさない．図からもすぐにわかるであろう)．

ここからわかるように部分空間であるためには “原点” を含んでいる必要がある．これはスカラー倍で閉じていないといけないという要請からも自然である．実際，命題 9.2 (3) より，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して，$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{w}$ となるので，スカラー倍で閉じているならば $\mathbf{0}$ も含んでいないといけない．それではなぜ (s3) から導けそうなことをわざわざ定義条件に入れているのかと言うと，(s1) によって部分空間が空集合であるという状況を排除しているのである (空集合の場合 (s2)，(s3) は自明に真になってしまう)．

<u>X_2 が部分空間でないこと：</u>定義より，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in X_2$ であるが，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ は

$$3^2 - 5 = 4 \neq 0$$

となることより，$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin X_2$ である．よって，(s2) を満たさないので，X_2 は部分空間ではない (ちなみに (s3) も満たさない．図からもすぐにわかるであろう)．

以上の計算から推測されるかもしれないが，実際 $\mathbb{R}^2$ における部分空間は，

- 原点のみからなる集合：$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- <u>原点を通る</u>直線：$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ ax + by = 0 \right\} \ (a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0))$.
- $\mathbb{R}^2$ 全体

のいずれかとなる．是非証明を試みて欲しい．

例 8 (連立一次方程式の解空間)**.** A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とする．このとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$W_A \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \ \middle| \ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

は $\mathbb{K}^n$ の部分空間となる．なお，この空間の一般の元の形を求めることは係数行列を A とする連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

の一般解を求めることに他ならないということに注意する．部分空間であることは以下のように証明される：

W_A が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを順にチェックすれば良い．

まず，$A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので[*5]，$\mathbf{0} \in W_A$ となるため，条件 (s1) は満たされる．

次に，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_A$ をとると，条件より

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \\ A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

となる．これらより，

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$$

となるので，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W_A$．よって，条件 (s2) も満たされる．

最後に，任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x} \in W_A$ をとると，条件より $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるので，

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって，

$$c\boldsymbol{x} \in W_A$$

[*5] 左辺の $\mathbf{0}$ は n 次零ベクトル，右辺の $\mathbf{0}$ は m 次零ベクトルである．

となる．これより，条件 (s3) も満たされる．以上より，W_A は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．

なお，$\mathbb{K}=\mathbb{R}, A=\begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$W_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x+y=0 \right\}$$

となる．これは例 7 の W である．よって，W_A はこの W の一般化であると見れる．

例 9 (固有空間)**.** A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$V(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}(\subset \mathbb{K}^n)$$

とするとき，これは $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．とくに，λ が A の固有値であるとき，$V(\lambda)$ は A の固有値 λ の固有空間の定義そのものであるということを思い出そう (定義 2.1)．なお，λ が A の固有値でないときは，$V(\lambda)=\{\mathbf{0}\}$ である．

$V(\lambda)$ が部分空間であることは以下のように証明される：

$V(\lambda)$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを順にチェックすれば良い．

まず，$A\mathbf{0}=\mathbf{0}=\lambda\mathbf{0}$ となるので，$\mathbf{0} \in V(\lambda)$ となるため，条件 (s1) は満たされる．

次に，任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V(\lambda)$ をとると，条件より

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1 \\ A\boldsymbol{v}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

となる．これらより，

$$A(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 = \lambda(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)$$

となるので，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \in V(\lambda)$．よって，条件 (s2) も満たされる．

最後に，任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ をとると，条件より $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ となるので，

$$A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}) = c\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(c\boldsymbol{v}).$$

よって，

$$c\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$$

となる．これより，条件 (s3) も満たされる．以上より，$V(\lambda)$ は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．

例 10 (自明な部分空間)**.** 一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V において，V の零元の身からなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$，および V 全体は V の部分空間である．これらが (s1)，(s2)，(s3) の条件を満たすことは自明であろう．これらの部分空間を V の**自明な部分空間**という．

例 11 (最大次数を固定した多項式の集合)**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．このとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}[x]$(例 2) の部分集合 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ を

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \coloneqq \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

と定義する．$\mathbb{K}[x]$ の定義とほとんど同じように見えるが，この部分集合の定義にあたっては n を先に固定しているということに注意しよう．つまり，これは『高々 n 次の多項式』全体のなす部分集合である．例えば，

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 0} = \{a \mid a \in \mathbb{K}\}, \quad \mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \{a+bx \mid a,b \in \mathbb{K}\}, \quad \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{K}\}$$

である．このとき，$\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ は $\mathbb{K}[x]$ の部分空間である．これは，

- (s1) $0 \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ であり，
- (s2) 2 つの高々 n 次式の和は高々 n 次式であり，
- (s3) 高々 n 次式のスカラー倍は高々 n 次式である

ということからわかる．

この部分空間は明らかに

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 0} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \subset \cdots$$

を満たす．

例 12 (C^k 級関数)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$または $k = \infty$ とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の k 階連続微分可能[*6]な実数値関数全体の集合

$$C^k(\mathbb{R}) \coloneqq \{f(x) \mid f(x) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上 } k \text{ 回階連続微分可能 }\}$$

とする．このとき，$C^k(\mathbb{R})$ は $C^0(\mathbb{R})$(例 4) の部分空間となる。これは，

- (s1) $0 \in C^k(\mathbb{R})$ であり，
- (s2) 2 つの k 階連続微分可能関数の和が再び k 階連続微分可能関数であり，
- (s3) k 階連続微分可能関数のスカラー倍が再び k 階連続微分可能となる

ということからわかる (詳細は微積分学の講義に譲ることにする).

最後に部分空間に関する一般的な命題を 1 つ示しておこう．

命題 9.5

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，W, W' をその部分空間とする．このとき，W と W の共通部分 $W \cap W'$ は再び V の部分空間となる．

証明. $W \cap W'$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを示せばよい．

(s1) を満たすこと： W, W' は V の部分空間なので，$\mathbf{0} \in W$ かつ $\mathbf{0} \in W'$．よって，$\mathbf{0} \in W \cap W'$．

(s2) を満たすこと： $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W \cap W'$ とすると，W, W' は V の部分空間なので，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$ かつ $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W'$．よって，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W \cap W'$．

(s3) を満たすこと： $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w} \in W \cap W'$ とすると，W, W' は V の部分空間なので，$c\boldsymbol{w} \in W$ かつ $c\boldsymbol{w} \in W'$．よって，$c\boldsymbol{w} \in W \cap W'$．

以上より，$W \cap W'$ は V の部分空間である． □

注意 3. ベクトル空間 V の部分空間 W, W' に対し，その和集合 $W \cup W'$ は一般には部分空間にはならない．例えば，ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$W \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\}$$

はそれぞれ部分空間であるが，それらの和集合 $W \cup W'$ は部分空間ではない．なぜなら，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W \cup W'$ であるが，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W にも W' にも入っていないから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W \cup W'$ となるためである ((s2) が満たされない).

一方，$W \cap W' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ であり，これは $\mathbb{R}^2$ の自明な部分空間である．

[*6] k 階連続微分可能とは k 回微分可能であり，かつその k 階までの導関数が全て連続となるということ．

線形代数 II 第 10 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

第 9 回講義資料 9.1 節の導入部分では "空間" と "座標" を分けて考えるというアイデアを紹介し，"(まっすぐな) 空間" の定式化として『$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間』を導入した．今回は "座標" の方の一般化である『基底』について解説する．$\mathbb{K}^n$ の基底については第 5 回講義資料 5.1 節 (定義 5.2) で扱った通りであり，今回はそれを一般のベクトル空間の基底に一般化する．一般化と言っても難しいことはなく，定義は $\mathbb{K}^n$ の場合の $\mathbb{K}^n$ を一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えるだけである．

10.1 ベクトル空間の基底

基底を定義するにあたって，まずは $\mathbb{K}^n$ のとき (定義 5.2) のように一次独立と生成という概念を準備する．いずれも以前 $\mathbb{K}^n$ としていたところを一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えるだけである．

定義 10.1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が**一次独立** (または**線形独立**) であるとは，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ は**一次従属** (または**線形従属**) であるという．

また，V の (有限集合とは限らない) 部分集合 B が**一次独立**であるとは，B の任意の有限部分集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\} \subset B$ が上の意味で一次独立な集合となることをいう．

以下は定義からほぼ明らかである．

命題 10.2

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の一次独立な部分集合とする．このとき，B の任意の部分集合 $B' \subset B$ は再び一次独立な部分集合となる．

例 1. $V = \mathbb{K}^n$ の場合は，ここでの一次独立性は定義 4.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ における一次独立性と全く同じものである．この場合の例については第 4 回講義資料の例 1〜6 を復習していただきたい．

例 2. $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ とする (第 9 回講義資料例 3)．このとき，

$$E \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと[*1]，

$$B \coloneqq \{I_2,\ E,\ F,\ H\}$$

は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 I_2 + c_2 E + c_3 F + c_4 H = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 これらを E, F, H と書くのは Lie 環論という分野でよくこの記号が使われるためである．あまり気にしないでいただきたいが，興味のある方は是非『Lie 環，$\mathfrak{sl}_2$』というキーワードで調べてもらいたい (私 (大矢) の専門分野です)．

になったと仮定する ($\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ における $\mathbf{0}$ は零行列であったことに注意する)．このとき，左辺の行列は具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} c_1+c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1-c_4 \end{pmatrix}$$

となるので，上の等式が成立するとき，

$$\begin{cases} c_1+c_4=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \\ c_1-c_4=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad c_1=c_2=c_3=c_4=0$$

となる．よって，B は一次独立である．

例 3. $V=\mathbb{K}[x]$ とする (第 9 回講義資料例 2)．このとき，

$$B_1 \coloneqq \{1, x, x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = \mathbf{0} = 0$$

になったと仮定する ($\mathbb{K}[x]$ における $\mathbf{0}$ は零行列 0 であったことに注意する)．このとき，$c_1=c_2=c_3=0$ である．よって，B_1 は一次独立である．

B_1 は最も標準的な一次独立な集合であるが，もちろんもっと複雑な例も考えることができる．

$$B_2 \coloneqq \{-3+2x+2x^2, x-x^2, -1+x-x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-3+2x+2x^2) + c_2(x-x^2) + c_3(-1+x-x^2) = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する．上式を整理すると

$$(-3c_1-c_3) + (2c_1+c_2+c_3)x + (2c_1-c_2-c_3)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -3c_1-c_3=0 \\ 2c_1+c_2+c_3=0 \\ 2c_1-c_2-c_3=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式が唯一の解として $c_1=c_2=c_3=0$ を持つことを示せばよい．いま，

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 4 \neq 0$$

より，この連立一次方程式は係数行列が正則なので，唯一つの解

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を持つ．よって，B_2 は一次独立である．

一次従属な例も見ておこう．

$$X \coloneqq \{-1+x^2, -2+2x+2x^2, -x\}$$

とすると，X は $\mathbb{K}[x]$ において一次従属である．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-1+x^2) + c_2(-2+2x+2x^2) + c_3(-x) = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する．上式を整理すると，

$$(-c_1 - 2c_2) + (2c_2 - c_3)x + (c_1 + 2c_2)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -2c_2 \\ c_3 = 2c_2 \end{cases}$$

となるので，例えば $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 2$ とすると，上式が成立する．よって，X は一次従属となる．

例 4. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする (第 9 回講義資料例 12)．このとき，

$$B \coloneqq \{\sin x, \cos x\}$$

は $C^0(\mathbb{R})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する ($C^\infty(\mathbb{R})$ における $\mathbf{0}$ は定数関数 0 であったことに注意する)．上式は $\mathbb{R}$ 上の関数としての等式なので，x に任意の実数を代入しても等式が成立する．$x = 0$ とすると，

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$

なので，$c_2 = 0$ である．$x = \pi/2$ とすると，

$$c_1 \sin(\pi/2) + c_2 \cos(\pi/2) = 0$$

なので，$c_1 = 0$ である．よって，$c_1 = c_2 = 0$ となるので，B は一次独立である．

例 5. 無限個の元からなる一次独立な集合も見ておこう．$V = \mathbb{K}[x]$ とする．このとき，

$$B \coloneqq \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．任意の B の有限部分集合

$$\{x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_k}\} \subset B$$

をとると，これは例 3 の B_1 と同じように一次独立な集合であることがわかる．よって，B は一次独立である．

次に生成という用語を用意しよう，

定義 10.3

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B に対し，B の元の 1 次結合全体からなる集合を $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ と書き，これを B によって**生成される** (または**張られる**) 部分空間という．つまり，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B \coloneqq \{c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k \mid c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k \in B\}$$

とする．定義より，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ は $\mathbf{0}$ を含み，和とスカラー倍で閉じているので，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ は V の部分空間である．

例 6. $V = \mathbb{K}^n$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\} &= \{c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

である．一般に，$B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であるとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = \mathbb{K}^n$$

となるのであった ($\mathbb{K}^n$ の基底の定義 5.2 の条件 (2))．

例 7. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ を考えるとき，B は一次独立である必要は無い．例を見てみよう．$V = \mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は一次従属である (第 4 回講義資料例 3)．このとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_{\mathbb{K}} B &= \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^2 \end{aligned}$$

である．このように $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ を考える上で B に “余分” にベクトルが入っていることもある．

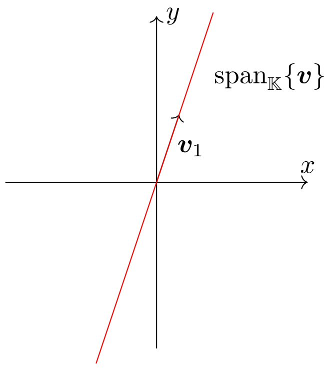
例 8. $V = \mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}\} = \{c\boldsymbol{v} \mid c \in \mathbb{K}\} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{K} \right\}$$

である．図示すると以下のようになっている．



一般に $\mathbb{K}^n$ において，1 元 $\boldsymbol{v}$ で生成される部分空間は原点 $\mathbf{0}$ を通り，方向ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする直線となる．

例 9. $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ とする．例 2 の記号を再び用いる．このとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \{I_2,\ E,\ F,\ H\} &= \{c_1 I_2 + c_2 E + c_3 F + c_4 H \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K} \right\}. \end{aligned}$$

となる．ここで，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ に対し，

$$c_1 = \frac{a+d}{2}, \quad c_2 = b, \quad c_3 = c, \quad c_4 = \frac{a-d}{2}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とできる．これより $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の任意の元は I_2, E, F, H の一次結合で書けることがわかる．よって，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

である．因みに，

$$B' \coloneqq \{E, F, H\}$$

とすると，

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B' &= \{c_1 E + c_2 F + c_3 H \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} c_3 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}
\end{aligned}$$

となる．

例 10. $V = \mathbb{K}[x]$ とする．例 3，例 5 の記号を再び用いる．このとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{1, x, x^2\} = \{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}[x]_{\leq 2},$$

となる (第 9 解講義資料例 11 の記号参照)．また，

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\
&= \{c_1 x^{n_1} + \cdots + c_k x^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathbb{K}[x]
\end{aligned}$$

となる．

例 11. $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$ とする．このとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\sin x, \cos x\} = \{c_1 \sin x + c_2 \cos x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{K}\}$$

となる．これは $C^{\infty}(\mathbb{R})$ 内の部分空間

$$\left\{ f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x) \right\}$$

に一致する (詳細は微積分学に譲る)．この部分空間は微分方程式 $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x)$ の解空間ということができる．

それでは以下が一般のベクトル空間の基底の定義である．この定義で V を $\mathbb{K}^n$ とすると，定義 5.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ の基底の定義と同じになることに注意する．

定義 10.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が次の性質 (b1)，(b2) を満たすとき，B を V の**基底** (basis) という．

(b1) B は一次独立である．

(b2) B は V を生成する．つまり．$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である．

例 12. 上に述べたように，$V = \mathbb{K}^n$ のときは，ここでの基底は定義 5.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ の基底の定義と全く同じである．$\mathbb{K}^n$ の基底は n 個の一次独立なベクトルということもできたことを思い出しておこう (定義 5.2 下部)．

例 13. 例 2 と例 9 での計算から，$B \coloneqq \{I_2,\ E,\ F,\ H\}$ は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底であることがわかる．

例 14. m, n を正の整数とし，E_{ij} を (i, j) 成分が 1，その他の成分が全て 0 の $m \times n$ 行列とする．例えば，$m = 2, n = 3$ のとき，

$$E_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{13} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{23} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ は $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ の基底である．証明は容易なので練習問題とする (これは数字の並べ方を四角にしているだけで，実質 $\mathbb{K}^{mn}$ の話と思えば良く，その場合 E_{ij} は単位ベクトルに対応するものである)．

例 15. 例 3, 例 10 での計算から，$\{1, x, x^2\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であることがわかる．より一般に，$\{1, x, \ldots, x^k\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ の基底である (考え方は $k = 3$ のときと全く同じである)．また，例 5 での考察を踏まえると，$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $\mathbb{K}[x]$ の基底である．

基底があると，第 5 回講義資料 5.1 節での考え方のようにして空間に "座標" を入れることができる．そのことを保証するのが以下の命題である．

命題 10.5

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の基底とする．このとき任意の V の元は B の元の一次結合としてただ一通りに表すことができる．

証明． まず，任意の V の元が B の元の一次結合として表すことができるというのは基底の定義条件 (b2) そのものである．よって，後はこの表示が一意的であることを示せばよい．

ある $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B$($\boldsymbol{b}_i$ らは相異なるとする) と $c_1, \ldots, c_k, c'_1, \ldots, c'_k, \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = c'_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{b}_k$$

となったと仮定する．このとき，移項して，

$$(c_1 - c'_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (c_k - c'_k)\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$$

となるが，B の一次独立性 (b1) により，

$$c_1 - c'_1 = \cdots = c_k - c'_k = 0$$

となる．つまり，

$$c_1 = c'_1,\ c_2 = c'_2, \ldots, c_k = c'_k$$

となる．よって，同じ元を B の元の一次結合として 2 通りに表すことはできないことがわかる． □

この命題は，V の元のすべての元が

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k$$

という形に1 通りに表せるということを述べている．それはつまり，空間内の各点に対し，$c_1, \ldots, c_k$ という $\boldsymbol{b}_k$ 達の係数がただ 1 通りに定まり，それが V の点を完全に指定しているということである．座標と言うのは "その空間内の各点に数の組を割り当て，それによって空間内の点を指定する" というものだったので，これは座標を与えていることに他ならないのである．この考え方は先の講義で再び詳しく扱うことになる．

最後にベクトル空間の次元について述べておこう．

定義 10.6

n を正の整数又は ∞ とする．$\mathbb{K}$ 上の $\{\boldsymbol{0}\}$ でないベクトル空間 V が n 個の元からなる基底を持つとき，V の**次元** (dimension) が n であるといい，$n = \dim_{\mathbb{K}} V$ (あるいは単に $\dim V$) と書く．また，$V = \{\boldsymbol{0}\}$ のときは，$\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ とする．

例 16. n を正の整数とする．$\mathbb{K}^n$ は $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という n 個の元からなる基底を持つため，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ である．これは直感に合った値であろう．

例 17. m, n を正の整数とする．例 14 で見たように，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は mn 個の元からなる基底 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ をもつので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$ である．

例 18. 例 15 で見たように，正の整数 k に対し，$\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ は $k+1$ 個の元からなる基底 $\{1, x, \ldots, x^k\}$ を持つので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq k} = k+1$ である．また，$\mathbb{K}[x]$ は無限個の元からなる基底 $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ をもつので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$ である．

例 19. 複素数 $\mathbb{C}$ を通常の和と実数倍により，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみる．このとき，任意の複素数はある 2 つの実数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $c_1 + c_2 i$ の形に書ける．つまり，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, i\} = \mathbb{C}$$

である．さらに，ある実数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し，$c_1 + c_2 i = 0$ であるとき，$c_1 = c_2 = 0$ なので，$\{1, i\}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}$ において一次独立である．よって，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみたとき，$\{1, i\}$ は基底である．これより，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である．一方，$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ である ($\mathbb{C}^n$ の $n = 1$ のとき)．

ここで注意深い方は，この基底の定義に以下のような疑問をいだくであろう．

(Q1) ベクトル空間の次元はいつでも定まるのか? (特にベクトル空間の基底はいつでも取れるのか?)

(Q2) あるベクトル空間が m 個の元からなる基底と n 個の元からなる基底 $(n \neq m)$ を同時に持ってしまうことはないのだろうか?

もし，基底が存在しないベクトル空間があると “次元” の定まらないベクトル空間ができてしまう．$\mathbb{K}^n$ を想像しているうちは『基底がないことなんてないだろう』と思ってしまいそうだが，$C^{\infty}(\mathbb{R})$ などの大きいベクトル空間を考え始めるといつでも基底が取れるという事実は当たり前ではないということがわかるだろう (全てのなめらかな関数がその部分集合の 1 次結合で書けるというような一次独立な関数の集まりはあるのだろうか?)．また，(Q2) は同時に元の数の異なる基底が複数存在してしまうと “基底の元の数” という次元の定義が破綻してしまうことになる．

実はこれらの心配は無用であるということを以下の定理は保証している．定理 10.7 の証明のためにはいくつか言葉を準備する必要があるが，それをすると講義の本筋から大きく脱線してしまうため，ここでは証明は扱わない．証明においては選択公理と同値であることが知られている『ツォルンの補題』と呼ばれる補題を用いる．『基底　ツォルンの補題』というような検索ワードで検索してみると厳密な証明に当たることができると思われるので，興味のある方は各自自習してもらいたい．定理 10.8 については補足プリントで証明を配布するので，興味のある方は確認してもらいたい．

定理 10.7

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V は必ず基底を持つ．

定理 10.8

n を正の整数とする．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．
このとき，V のある基底が n 個の元からなるとすると，V の任意の基底の元の個数は n 個である．

例 20. 例 13，例 14 で見たように，$\{I_2, E, F, H\}$ も $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ も $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底であるが，共に元の個数は $2 \times 2 = 4$ である．

次に基底に関する便利な定理を述べる．これらも証明は補足プリントで与える．(2) が命題 5.1，および命題 6.1 の一般のベクトル空間バージョンであることに注意しよう．

定理 10.9

V を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，その次元を n とする．このとき，以下が成立する：

(1) V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を満たすとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，一次独立性 (基底の定義 10.4 (b1)) は自動的に満たされる．

(2) $k \leq n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を一次独立な V の元の組とする．このとき，適切に V の $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が存在して，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．
特に，V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，生成性 (基底の定義 10.4 (b2)) が自動的に満たされる．

例 21. $V = \mathbb{K}[x]$ とする．例 3 より，

$$B_2 \coloneqq \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ における一次独立な元であった．ここで，B_2 の元は全て $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の元であることに注意すると，B_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の一次独立な 3 つの元であるとも言える．ここで，例 18 より，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = 3$ だったので，B_2 は 3 次元空間の 3 つの一次独立な元の組である．よって，定理 10.9 (2) より，B_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底となる (生成性 (基底の定義 10.4 (b2)) をチェックしなくて良い！)．

最後に，『連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を解く』という今まで行ってきた操作が，『$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ で定まる部分空間の基底を求める』という操作に対応していたということを述べて資料を締めくくろう．以下の定理は一般的な記号で書くと非常に複雑に見えるが，要するに『連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を簡約化を用いて解くと自動的に解空間の基底が得られる』ということを主張している．一般的な記号が混乱する場合には定理の証明の後にある例を先に参照するようにしてほしい．

定理 10.10

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列とし，$\mathbb{K}^n$ の部分空間

$$W_A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

を考える．A を簡約化したとき，

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & a'_{1k_1+1} & \cdots & a'_{1k_2-1} & 0 & a'_{1k_2+1} & \cdots & a'_{1k_3-1} & 0 & a'_{1k_3+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{2k_2+1} & \cdots & a'_{2k_3-1} & 0 & a'_{2k_3+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{3k_3+1} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

という形になったとする．つまり，第 k_i 列に i 行目の 1 が入るようにできたとする．また，$\operatorname{rank} A = r$(簡約階段行列の段の数) とする．このとき，各 $i=0,1,\dots,r$ と $k_i<\ell<k_{i+1}$ (ただし，$k_0=0, k_{r+1}=n+1$ とする) に対し，$\boldsymbol{p}_\ell = \begin{pmatrix} p_{1\ell} \\ \vdots \\ p_{n\ell} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ を

$$p_{s\ell} = \begin{cases} -a'_{t\ell} & s=k_t, t=1,\dots,i \text{ のとき} \\ 1 & s=\ell \text{のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} B_A &= \{\boldsymbol{p}_\ell \mid k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r\} \\ &= \{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_{k_1-1},\boldsymbol{p}_{k_1+1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_2-1},\boldsymbol{p}_{k_2+1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_3-1},\boldsymbol{p}_{k_3+1},\dots\} \end{aligned}$$

は W_A の基底である．特に，B_A の元の個数は $n-r=n-\operatorname{rank} A$ であり，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = n-\operatorname{rank} A$$

である．

証明． 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解は B_A の元の一次結合で表されるもので全てであるということは線形代数 I の講義で学習済みである．この事実は今回学んだ用語を用いると，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_A = W_A$$

ということに他ならない．よって，あとは B_A が一次独立な集合であることを示せば良い．ある $c_\ell \in \mathbb{K}$ $(k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r)$ が存在して，

$$\mathbf{0} = \sum_{k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r} c_\ell \boldsymbol{p}_\ell = c_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_{k_1-1}\boldsymbol{p}_{k_1-1}+c_{k_1+1}\boldsymbol{p}_{k_1+1}+\cdots+c_{k_2-1}\boldsymbol{p}_{k_2-1}+c_{k_2+1}\boldsymbol{p}_{k_2+1}+\cdots$$

となると仮定する．各 $k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r$ に対し，右辺の元の第 ℓ 成分を考える．いま B_A の元のうち第 ℓ 成分に 0 でない成分があるベクトルは $\boldsymbol{p}_\ell$ だけであるということに注意すると，右辺の一次結合の第 ℓ

成分は c_ℓ である．よって，上式が成立するとき，すべての $k_i < \ell < k_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, r$ に対し，

$$c_\ell = 0$$

となることがわかる．よって，B_A は一次独立である． □

この定理 10.10 に現れた $n - \operatorname{rank} A$ という値は，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度 (解に現れる必要最小限のパラメータの数) に他ならなかった (第 1 回本レポート課題解答問題 7 補足解説参照)．よって，解の自由度とは『$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間のベクトル空間としての次元』という言葉で表すことができる．

例 22.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

として，$\mathbb{K}^5$ の部分空間

$$W_A := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^5 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

を考える．ここで A を簡約化すると，

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる (定理 10.10 の記号で $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5$)．これより，$\operatorname{rank} A = 3$ である．さて，

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

であるので，左の連立一次方程式を解くためには右の連立一次方程式を解けば良い．このとき，

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると (この $\boldsymbol{p}_\ell$ の記号は定理 10.10 の記号と整合している)，この解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ は一般に

$$\boldsymbol{x} = c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4,\ c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

と書ける．つまり

$$W_A = \{c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{K}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_4\}$$

である．ここで，

$$c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -2c_2 - 2c_4 \\ c_2 \\ -3c_4 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので，$c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}$ であるときこのベクトルの第 2，第 4 成分に着目すると，$c_2 = c_4 = 0$ であることがわかる．よって，$\{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_4\}$ は一次独立であり，W_A の基底である．この議論を一般的に書いているのが定理 10.10 の証明である．

線形代数 II 第 11 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回のテーマは『線形写像』である．線形写像とはベクトル空間の間の写像であって，和とスカラー倍と "両立する" 写像である (厳密な定義は後程)．以下で見るように様々な重要な変換 (例えば回転変換，対称変換，微分等々$\cdots$) は実は線形写像として表される．また，次回以降，線形写像は行列を用いて表すことができるということがわかる．つまり，線形写像は重要な変換を含むが，一方では行列を用いて計算ができるというとても大事な写像のクラスなのである．

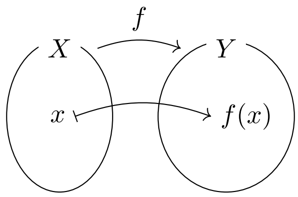
本題に入る前に，まずは写像の基本用語について復習をしておこう．

写像の用語の復習

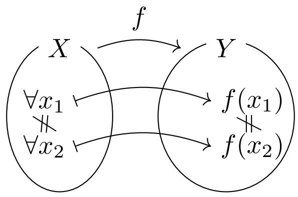
集合 X, Y に対して，**写像** $f\colon X \to Y$ とは，X の各元 x に対して，集合 Y のある元 $f(x)$ を対応させる対応のことである．この写像を

$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$$

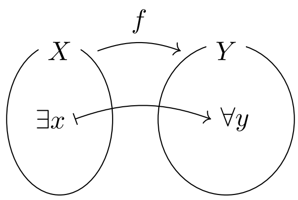
というように表す．(例：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$．このとき，例えば $f(1)=1^2=1, f(2)=2^2=2$．)



写像 $f\colon X \to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x_1 \neq x_2$ なる $x_1, x_2 \in X$ に対して，$f(x_1) \neq f(x_2)$ となることである．(上の例は，$1 \neq -1$ に対し，$f(1)=1=(-1)^2=f(-1)$ なので単射ではない．)



写像 $f\colon X \to Y$ が**全射**であるとは，任意の $y \in Y$ に対し，ある $x \in X$ が存在して，$f(x)=y$ となるということである．(上の例では，$-1 \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x)=x^2=-1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので，全射ではない．)

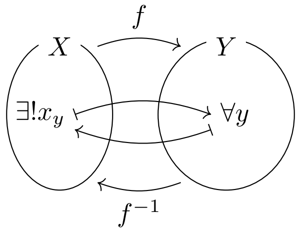


* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

写像 $f\colon X \to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．このとき，各 $y \in Y$ に対し，$f(x_y) = y$ となる $x_y \in X$ が必ずただ 1 つだけ存在するので，y に対してこの x_y を対応させることで，写像

$$Y \to X,\ y \mapsto x_y$$

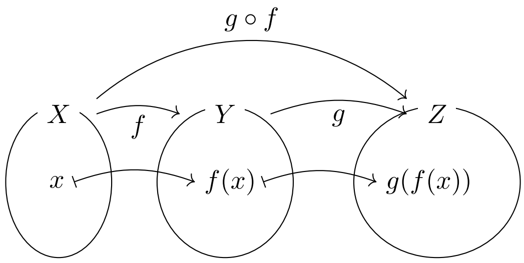
が得られる．これを f の**逆写像**といい，f^{-1} と書く．



写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ に対し，写像の合成 $g \circ f\colon X \to Z$ とは，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X$$

で定まる写像である．



$f\colon X \to Y$ が全単射のとき，

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \text{ かつ } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

である．ここで，$\mathrm{id}_Z\colon Z \to Z$ は**恒等写像** $z \mapsto z$ $(Z = X, Y)$ である．

11.1 線形写像

それではまず線形写像を定義し，その後で様々な例を見よう．

定義 11.1

V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が**線形写像**であるとは，

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')$,
(2) 任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$,

を満たすことである．

例 1. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，f_A は線形写像であることが以下のように確かめられる．

任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathbb{K}^n, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$f_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v}' = f_A(\boldsymbol{v}) + f_A(\boldsymbol{v}'),$$
$$f_A(c\boldsymbol{v}) = A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = cf_A(\boldsymbol{v}).$$

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，f_A は

$$f_A\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ -x+3y+2z \end{pmatrix}$$

で定まる線形写像となる．

$\mathbb{R}^2$ において原点を中心に各点を θ 回転させるという変換は

$$\mathrm{Rot}(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$f_{\mathrm{Rot}(\theta)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{Rot}(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので，線形写像である．

$\mathbb{R}^2$ において原点を通る傾き θ の直線を軸にした線対称変換は

$$\mathrm{Ref}(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$f_{\mathrm{Ref}(\theta)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{Ref}(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y \\ (\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので，線形写像である．

(例えば，$\theta = 0$ のとき x 軸に関する線対称変換で $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$，$\theta = \pi/2$ のとき y 軸に関する線対称変換で $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$．)

例 2. 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ は線形写像ではない．なぜなら，

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，線形写像の定義条件 (1) が満たされないためである．ちなみに，

$$f\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

でもあるので，線形写像の定義条件 (2) も満たされていない．

例 3. 微分写像

$$\frac{d}{dx}\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x)$$

を考える ($\mathbb{K}[x]$ については第 9 回講義資料例 2 を参照)．このとき，$\frac{d}{dx}$ は線形写像である．実際，微分という操作は以下を満たす (詳細は微積分学に譲る)：

任意の $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}(x).$$

例 4. 転置写像

$$T\colon \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^tA$$

を考える ($\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ については第 9 回講義資料例 3 を参照). このとき, T は線形写像である. 実際, 転置という操作は以下を満たすことが容易に確かめられる :

任意の $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し,

$$T(A+B) = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = T(A) + T(B), \qquad T(cA) = {}^tcA = c\,{}^tA = cT(A).$$

例 5. トレース写像

$$\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$$

を考える. このとき, Tr は線形写像である. トレースは以下の性質を満たすのであった. これも証明はトレースの定義から容易である (第 9 回本レポート課題解答問題 1 参照) :

任意の $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \qquad \mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A).$$

以下は線形写像の基本性質である.

命題 11.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし, $f\colon V \to W$ を線形写像とする. V, W の零元をそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く. このとき, 以下が成立する.

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $f(-\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$.

証明.

(1) 線形写像の定義条件 (1) と零元の性質より,

$$f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V) + f(\mathbf{0}_V)$$

となるので, 両辺に $-f(\mathbf{0}_V)$ を加えて, $\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V)$.

(2) 命題 9.2 (4) より, $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ なので, 線形写像の定義条件 (2) から,

$$f(-\boldsymbol{v}) = f((-1)\boldsymbol{v}) = (-1)f(\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$$

となる. □

命題 11.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間としたとき, 以下が成立する.

(1) $f\colon V \to W, f'\colon V \to W$ を線形写像としたとき, $f + f'\colon V \to W$ を

$$\boldsymbol{v} \mapsto f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v})$$

により定義すると, $f + f'$ は再び線形写像となる.

(2) $f\colon V \to W$ を線形写像としたとき, $c \in \mathbb{K}$ に対して $cf\colon V \to W$ を

$$\boldsymbol{v} \mapsto cf(\boldsymbol{v})$$

により定義すると, cf は再び線形写像となる.

(3) $g\colon U \to V, f\colon V \to W$ を線形写像とすると, その合成 $f \circ g\colon U \to W$ は再び線形写像となる.

証明.

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(f+f')(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') + f'(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \\
&= f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') + f'(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') \quad (f, f' \text{は線形写像なので}) \\
&= f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') + f(\boldsymbol{v}') \\
&= (f+f')(\boldsymbol{v}) + (f+f')(\boldsymbol{v}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f+f')(c\boldsymbol{v}) &= f(c\boldsymbol{v}) + f'(c\boldsymbol{v}) \\
&= cf(\boldsymbol{v}) + cf'(\boldsymbol{v}) \quad (f, f' \text{は線形写像なので}) \\
&= c(f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v})) \\
&= c(f+f')(\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

となるので，$f+f'$ は線形写像である．

(2) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c' \in \mathbb{K}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(cf)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') &= cf(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \\
&= c(f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\
&= cf(\boldsymbol{v}) + cf(\boldsymbol{v}') \\
&= (cf)(\boldsymbol{v}) + (cf)(\boldsymbol{v}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(cf)(c'\boldsymbol{v}) &= cf(c'\boldsymbol{v}) \\
&= c'cf(\boldsymbol{v}) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\
&= c'(cf)(\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

となるので，cf は線形写像である．

(3) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}') &= f(g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}')) \\
&= f(g(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}')) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\
&= f(g(\boldsymbol{u})) + f(g(\boldsymbol{u}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\
&= (f \circ g)(\boldsymbol{u}) + (f \circ g)(\boldsymbol{u}')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(c\boldsymbol{u}) &= f(g(c\boldsymbol{u})) \\
&= f(cg(\boldsymbol{u})) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\
&= cf(g(\boldsymbol{u})) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\
&= c(f \circ g)(\boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

となるので，$f \circ g$ は線形写像である． □

注意 1．命題 11.3 (1)，(2) で定義された和とスカラー倍により，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{ f\colon V \to W \mid f \text{ は線形写像 } \}$$

という V から W への線形写像全体のなす集合はベクトル空間となる．ベクトル空間の定義条件 (v1)〜(v8) を各自チェックせよ．

例 6. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A$ は明らかに線形写像なので，例 4 の転置写像 T の -1 倍と id を命題 11.3 (1) の意味で加えた

$$\mathrm{id} - T\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A - {}^tA$$

も線形写像となる．

例 7. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $\ell \times m$ 行列，B を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，例 1 のように線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^\ell,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \qquad f_B\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，合成写像 $f_A \circ f_B$ は，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対し，

$$(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{x}) = f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = f_A(B\boldsymbol{x}) = AB\boldsymbol{x}$$

で与えられるので，線形写像

$$f_{AB}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^\ell, \boldsymbol{x} \mapsto AB\boldsymbol{x}$$

に一致する．つまり，$f_A \circ f_B = f_{AB}$ である．これは見方を変えれば，『行列の積は $f_A \circ f_B = f_{AB}$ を満たすように定義されている』とも言える．

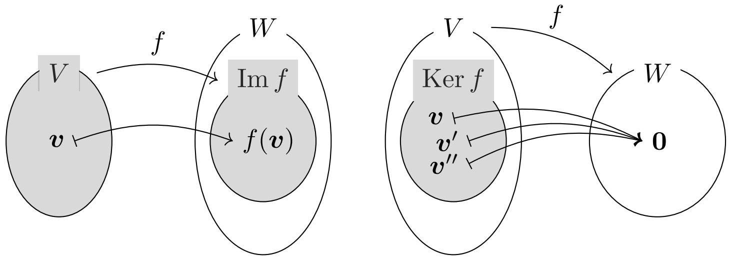
11.2　像と核

線形写像を考えるとそこから像と核という大事な部分空間が定まる．例は諸性質を述べた後に命題 11.7 の下にまとめて記載しているので，先に例を見たいという方は定義を読んだらそちらに飛んでほしい．

定義 11.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，f の像 (image)$\operatorname{Im} f$ と核 (kernel)$\operatorname{Ker} f$ は以下で定義される：

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\} = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}, \\ \operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}. \end{aligned}$$



命題 11.5

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間である．
(2) $\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間である．

証明. V, W の零元をそれぞれ $\boldsymbol{0}_V, \boldsymbol{0}_W$ と書く．

(1) 命題 11.2 (1) より，$f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ となるので，$\boldsymbol{0}_W \in \operatorname{Im} f$ である．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} f$ をとると，像の定義より，ある $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ が存在して，$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$ となる．これより，

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in \operatorname{Im} f$$

となる．

さらに，任意の $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ をとると，像の定義より，ある $\boldsymbol{v} \in V$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる．これより，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{w} = cf(\boldsymbol{v}) = f(c\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$$

となる．以上より，$\operatorname{Im} f$ は W の部分空間である．

(2) 命題 11.2 (1) より，$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ となるので，$\mathbf{0}_V \in \operatorname{Ker} f$ である．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$ に対し，核の定義より，

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

となるので，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$ である．

さらに，任意の $c \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ に対し，核の定義より，

$$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v}) = c\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

より，$c\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ である．以上より，$\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間である． □

実はより一般に以下が成立する．この証明は命題 11.5 の証明とほぼ同様であるが，第 11 回レポート課題に回すこととする．

命題 11.6

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) $U \subset V$ を V の部分空間とする．このとき，W の部分集合

$$f(U) \coloneqq \{f(\boldsymbol{u}) \in W \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

は W の部分空間である．

(2) $U' \subset W$ を W の部分空間とする．このとき，V の部分集合

$$f^{-1}(U') \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) \in U'\}$$

は V の部分空間である．

注意 2. 命題 11.6 の (1) で $U = V$(自明な部分空間) とすると，像の定義より，

$$f(V) = \operatorname{Im} f$$

である．また，命題 11.6 の (2) で $U' = \{\mathbf{0}\}$(自明な部分空間) とすると，核の定義より，

$$f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \operatorname{Ker} f$$

となる．これらより，命題 11.6 は命題 11.5 の一般化と見ることができる．

また，V の任意の部分集合 B に対し，

$$\begin{aligned} f(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B) &= \{f(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k) \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B\} \\ &= \{c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{b}_k) \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(B) \quad \text{ただし，} f(B) \coloneqq \{f(\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{b} \in B\} \end{aligned}$$

が成立する．

命題 11.7

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下の同値関係が成立する．

(1) f は全射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$.

(2) f は単射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

証明. 証明中では V, W の零元をそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．

(1) これは全射の定義そのものである．

(2) $\Rightarrow$ 方向: 命題 11.2 (1) より $f(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$ なので，f の単射性より，任意の $\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}_V\}$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v})\neq f(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W.$$

よって，任意の $\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}_V\}$ に対し，$\boldsymbol{v}\notin \operatorname{Ker} f$．これより，$\operatorname{Ker} f=\{\mathbf{0}_V\}$.
$\Leftarrow$ 方向: 任意の $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{v}_2$ なる $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$ をとる．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1)\neq f(\boldsymbol{v}_2)$ となることを示せばよい．いま，$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\neq\mathbf{0}_V$ と $\operatorname{Ker} f=\{\mathbf{0}\}$ より，

$$\mathbf{0}_W\neq f(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)=f(\boldsymbol{v}_1)-f(\boldsymbol{v}_2).$$

これより，$f(\boldsymbol{v}_1)\neq f(\boldsymbol{v}_2)$. □

例 8. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列とし，例 1 のように線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x},$$

を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f_A&=\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{K}^m\mid \text{ある } \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n \text{が存在して，} \boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}\},\\ \operatorname{Ker} f_A&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n\mid A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

となる．これより，

- $\operatorname{Im} f_A$ は『連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つような $\boldsymbol{b}$ 全体』
- $\operatorname{Ker} f_A$ は『連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間 W_A(第 9 回講義資料例 8)』

に他ならないことがわかる．これより，命題 11.7 より，

- f_A が全射 $\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 任意の $\boldsymbol{b}$ に対して解を持つ
- f_A が単射 $\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は自明なもの $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ しかない $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A=n$

という同値関係がわかる (実は f_A が全射ということは $\operatorname{rank} A=m$ と同値であるということを次回証明する).
また，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと (つまり $A=(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$),

$$\operatorname{Im} f_A=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$$

である．実際，像の定義より，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f_A=\{f_A(\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n\}&=\left\{A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n\right\}\\ &=\{x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n\mid x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}\}\\ &=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}\end{aligned}$$

である．例えば，$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f_A&=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}c_1+2c_2\\2c_1+4c_2\end{pmatrix}\ \middle|\ c_1,c_2\in\mathbb{K}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}c\\2c\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{K}\right\}.\\ \operatorname{Ker} f_A&=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \middle|\ x+2y=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2c\\c\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{K}\right\}.\end{aligned}$$

この f_A は全射でも単射でもない．
なお，一般に P を n 次正則行列としたとき，

$$f_P\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x}\mapsto P\boldsymbol{x}$$

は全単射線形写像である．実際，

$$f_{P^{-1}}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P^{-1}\boldsymbol{x}$$

を考えると，例 7 での計算により，

$$f_{P^{-1}} \circ f_P = f_{P^{-1}P} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \quad f_P \circ f_{P^{-1}} = f_{PP^{-1}} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$$

となるので，$f_{P^{-1}}$ は f_P の逆写像となる (逆写像が存在する写像は全単射である)．実は，f_A の形の写像が全単射であることと A が正則であることは同値であることが次回示される．

例 9. 例 3 で考えた微分写像を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\frac{d}{dx} &= \left\{ f(x) \in \mathbb{K}[x] \;\middle|\; \text{ある } F(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ が存在して，} f(x) = \frac{dF}{dx}(x) \right\}, \\
\mathrm{Ker}\,\frac{d}{dx} &= \left\{ f(x) \in \mathbb{K}[x] \;\middle|\; \frac{df}{dx}(x) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

となる．ここで，多項式は多項式の範囲で不定積分可能なので，任意の $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して，$f(x) = \dfrac{dF}{dx}(x)$ を満たす $F(x) \in \mathbb{K}[x]$ を見つけることができる．(例えば，$f(x) = 1 + x + x^2$ のとき，$F(x) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$ と取ればよい．) これより，

$$\mathrm{Im}\,\frac{d}{dx} = \mathbb{K}[x]$$

となり，$\dfrac{d}{dx}$ は全射であることがわかる．一般に微分写像の像は “定義域の範囲で積分可能な元の集まり” となっているのである．

また，$\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ は定数多項式のみなので，

$$\mathrm{Ker}\,\frac{d}{dx} = \{c \mid c \in \mathbb{K}\}$$

となる．これより，微分写像 $\dfrac{d}{dx}\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ は全射であるが単射ではない．

例 10. 例 6 で考えた写像

$$\mathrm{id} - T\colon\ \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A - {}^t\!A$$

を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\mathrm{id} - T) &= \left\{ B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \text{ある } A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ が存在して，} B = A - {}^t\!A \right\}, \\
\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - T) &= \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A - {}^t\!A = O \right\}
\end{aligned}$$

となる (O は零行列)．ここで，

$${}^t(A - {}^t\!A) = {}^t\!A - {}^t({}^t\!A) = {}^t\!A - A = -(A - {}^t\!A)$$

となるので，ある $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ が存在して，$B = A - {}^t\!A$ と書ける行列 B は ${}^t\!B = -B$ を満たす行列である．逆に ${}^t\!B = -B$ を満たす行列はある $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ が存在して，$B = A - {}^t\!A$ と書けることが確かめられる (A を B の上三角部分を取り出してきた行列とすればよい．詳細は考えて見よ)．よって，

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id} - T) = \left\{ B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid {}^t\!B = -B \right\}$$

となることがわかる．${}^t\!B = -B$ を満たす行列は**反対称行列**と呼ばれる．これより，$\mathrm{Im}(\mathrm{id} - T)$ は反対称行列全体からなる集合であると言える．一方，

$$A - {}^t\!A = O \ \Leftrightarrow\ A = {}^t\!A$$

なので，$\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - T)$ は対称行列全体からなる集合となる．

線形代数 II 第 12 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回はまず前回に引き続き線形写像に関する便利な諸性質を解説する．その後線形写像の中でも特別な『同型写像』について解説を行う．同型写像とは全単射線形写像のことであるが，これにより『ベクトル空間 V と W が同型である』という概念が定義される．ベクトル空間が同型であるとは，大雑把に言えば "ベクトル空間としては全く同じである" ということを意味している．これにより，ベクトル空間として同じもの，違うものというのが区別できるようになるが，そこで次元という概念が非常に重要な役割を果たすことを述べる．

12.1　線形写像補足

この節では線形写像を扱う上で便利な命題・定理について順に解説する．次の命題は『単射線形写像は一次独立という関係を保存する』ということを主張している (第 11 回講義内小テスト問題 4 参照).

命題 12.1

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を単射線形写像とする．$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$ が V の一次独立な部分集合であるとき，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_k)\}$ も W の一次独立な部分集合である．特に，任意の V の部分空間 U に対して，

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} f(U).$$

となる．

証明． ある $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{b}_k) = \mathbf{0}$$

となったと仮定する． このとき線形写像の性質より，左辺は $f(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k)$ となるので，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k \in \operatorname{Ker} f$$

である．ここで f は単射なので，命題 11.7 (2) より $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ であるから，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = \mathbf{0}.$$

いま $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ は V の一次独立な部分集合なので，このとき $c_1 = \cdots = c_k = 0$．よって，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_k)\}$ は W の一次独立な部分集合である．

U を V の部分空間とし，$B \subset U$ を U の基底とすると，基底の定義条件 (b2) より $U = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ なので，第 11 回講義資料 p.7 注意 2 で示した等式より，

$$f(U) = f(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(B) \quad ただし，f(B) \coloneqq \{f(\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{b} \in B\}.$$

よって，$f(B)$ は $f(U)$ を生成する．さらに，基底の定義条件 (b1) より B は一次独立であるが，上で示したことより，$f(B)$ も一次独立である．これらより，$f(B)$ は $f(U)$ の基底である．いま，f の単射性より，B の元の個数と $f(B)$ の元の個数は等しいので，$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} f(U)$ となる． □

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

以下は線形写像の像の次元は定義域の次元よりも増えることはないということを主張している．線形写像に単射性を仮定すると次元が減ることもないということを主張しているのが上の命題 12.1 であった．なお，証明は少し複雑に見える部分があるので，『この事実は自然に受け入れられる』という方は一旦証明を飛ばして読んでも良い．

命題 12.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V は有限次元であると仮定する．このとき $f\colon V \to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

が成立する．

証明． $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$ となるとき，$\dim_{\mathbb{K}} V \geq 0 = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$ となって命題は成立するので，以下では $\operatorname{Im} f \neq \{\mathbf{0}\}$ であると仮定して命題を証明する．なお， $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ のとき，$V = \{\mathbf{0}\}$ であり，線形写像の性質 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$ となるので，$\operatorname{Im} f \neq \{\mathbf{0}\}$ という仮定の下では $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 1$ でもあることに注意する．このとき，(0 個ではない) 有限個の元からなる V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ が存在する．第 11 回講義資料 p.7 注意 2 で示した等式より，

$$\operatorname{Im} f = f(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}. \tag{12.1}$$

これより，$\operatorname{Im} f$ は n 個の元で生成されるベクトル空間である．ここで，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ からいくつか (0 個かもしれない) 元を除くことで $\operatorname{Im} f$ の基底が構成できることが証明できれば，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

となることがわかる．よって，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ からいくつか (0 個かもしれない) 元を除くことで $\operatorname{Im} f$ の基底が構成できることを証明すれば良い．

もし $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ が一次独立であったとすると，(12.1) と合わせて $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底であることがわかる (一つも元を除く必要は無い)．

次に $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ が一次従属であったとすると，ある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ で $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ であるものが存在して，

$$c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{b}_n) = \mathbf{0}$$

とできる．ここで，$c_k \neq 0$ であったとすると，上式を変形して

$$f(\boldsymbol{b}_k) = -\frac{1}{c_k}(c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_{k-1} f(\boldsymbol{b}_{k-1}) + c_{k+1} f(\boldsymbol{b}_{k+1}) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{b}_n))$$

となるので，$f(\boldsymbol{b}_k)$ は $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \setminus \{f(\boldsymbol{b}_k)\}$ の一次結合で書ける．これより，

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \setminus \{f(\boldsymbol{b}_k)\})$$

である．つまり，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ から $f(\boldsymbol{b}_k)$ を除いたものも $\operatorname{Im} f$ を生成する．よって，もし $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \setminus \{f(\boldsymbol{b}_k)\}$ が一次独立であれば，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \setminus \{f(\boldsymbol{b}_k)\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である．もし $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \setminus \{f(\boldsymbol{b}_k)\}$ が一次従属であれば上の議論を繰り返すことにより，この集合から『$\operatorname{Im} f$ を生成する』という条件を保ったままさらに元を除くことができる．$\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ は有限集合なので，この議論は何度か繰り返すと必ず一次独立な集合が得られて終了する ($\operatorname{Im} f \neq \{\mathbf{0}\}$ なので $\{f(\boldsymbol{b}_1), \dots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ は少なくとも 1 つは $\mathbf{0}$ でない元を含むため，この議論の繰り返しで結局全ての元が取り除かれるということはない)．一次独立な集合が得られたとき，得られた集合は一次独立かつ $\operatorname{Im} f$ を生成するので $\operatorname{Im} f$ の基底である．よって示すべきことは示された． □

注意 1. $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ のときは任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に対し，$\dim_{\mathbb{K}} V = \infty \geq n$ であるので，主張が自明となるため命題 12.2 では V が有限次元であるという仮定を付けた．ただ実際には “∞” の間にも大小関係はあ

り，濃度という言葉で表されるが (例えば「自然数の濃度は実数の濃度よりも小さい」等)，本講義では簡単のため無限の間の比較は行わないことにする．無限の間の大小の比較を行うことにすると，命題 12.2 は V が無限次元の場合も成立して非自明な主張を与える．

注意 2. 命題 12.2 の証明と全く同じ議論により，以下が証明される：

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，n を正の整数として $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を V の n 個の元とする．このとき，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \leq n$$

である．

系 12.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき，f は全射にはなりえない．
(2) $\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき，f は単射にはなりえない．

証明.

(1) 仮定より $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ である (注意 1 で述べたように無限の間の大きさの比較は行わないので，$\infty < x$ となる $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ は存在しないことに注意する．なお，無限の間の比較を行うことにしてもこの命題の主張は成立する)．よって，命題 12.2 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \leq \dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$$

となるので，$\operatorname{Im} f \subsetneqq W$ となる．よって，f は全射ではない．
(2) f が単射であると仮定すると，命題 12.1 で $U = V$ としたものより，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} f(V) = \dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$$

となる．一方，$\operatorname{Im} f \subset W$ なので，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \leq \dim_{\mathbb{K}} W$ であり (第 10 回講義資料定理 10.9 (2) 参照)，これは上の不等式に矛盾する．よって，f は単射ではない． □

例 1. $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{K}) = 6, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^8 = 8$ より，系 12.3 (1) から，全射線形写像 $f\colon \operatorname{Mat}_{3\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^8$ は存在しない．

例 2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty, \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$ より，系 12.3 (2) から，単射線形写像 $f\colon \mathbb{K}[x] \to \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は存在しない．

次は線形写像を構成する上で便利な命題である：

命題 12.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$B \subset V$ を V の基底とする．各 $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，W の元 $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}}$ を任意に定めると ($\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}'$ に対して $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}'}$ となることがあっても良い)，線形写像 $F\colon V \to W$ であって，全ての $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，

$$F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}}$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．とくに，$f\colon V \to W, g\colon V \to W$ を V から W への 2 つの線形写像としたとき，任意の $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，

$$f(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{b})$$

が成立するのであれば，線形写像として $f = g$ である．

証明. 基底の定義条件 (b2) より，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ はある $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{K},\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k\in B$ を用いて

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k$$

という形に一通りに書けるが，これに対して

$$c_1\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+c_k\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}$$

を与えるという写像

$$F\colon V\to W,\ c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k\mapsto c_1\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+c_k\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}$$

を考える．F は定義より，任意の $\boldsymbol{b}\in B$ に対して $F(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}}$ を満たすので，あとはこれが線形写像であることを証明する．

任意の $c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k, c_1'\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k'\boldsymbol{b}_k\in V, c\in\mathbb{K}$ に対して，

$$\begin{aligned}F((c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k)+(c_1'\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k'\boldsymbol{b}_k)&=F((c_1+c_1')\boldsymbol{b}_1+\cdots+(c_k+c_k')\boldsymbol{b}_k)\\&=(c_1+c_1')\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+(c_k+c_k')\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}\\&=c_1\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+c_k\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}+c_1'\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+c_k'\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}\\&=F(c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k)+F(c_1'\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k'\boldsymbol{b}_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(c(c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k))&=F(cc_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+cc_k\boldsymbol{b}_k)\\&=cc_1\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+cc_k\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k}\\&=c(c_1\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+c_k\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}_k})\\&=cF(c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k)\end{aligned}$$

となるので，F は線形写像である．

最後に，このような線形写像 F がただ 1 つであることを証明するために，命題 12.4 の「とくに、」以降の主張を証明する (これは基底の各元の行き先が一致するような線形写像は写像として一致するということを主張している)．線形写像としての一致を示すためには，任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対して

$$f(\boldsymbol{v})=g(\boldsymbol{v})$$

となることを示せばよい．上で述べたように，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は，ある $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{K},\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k\in B$ を用いて，$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k$ という形に書けるということに注意すると，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{v})&=f(c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k)\\&=c_1f(\boldsymbol{b}_1)+\cdots+c_kf(\boldsymbol{b}_k)\quad(f\text{ は線形写像なので})\\&=c_1g(\boldsymbol{b}_1)+\cdots+c_kg(\boldsymbol{b}_k)\quad(\text{仮定より})\\&=g(c_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{b}_k)\quad(g\text{ は線形写像なので})\\&=g(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となることがわかる． □

例 3. 3 つの多項式 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)\in\mathbb{K}[x]$ を任意に選ぶと (重複があってもよい), 線形写像 $F\colon\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}[x]$ であって

$$F(\boldsymbol{e}_1)=f_1(x),\quad F(\boldsymbol{e}_2)=f_2(x),\quad F(\boldsymbol{e}_3)=f_3(x),$$

を満たすものが存在する．より具体的には

$$F\colon\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}[x],\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\mapsto c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)$$

とすれば，これが線形写像である．例えば，$f_1(x)=1+x^3+x^5, f_2(x)=f_3(x)=2x+3x^3$ とすると，

$$F\colon\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}[x],\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\mapsto c_1+2(c_2+c_3)x+(c_1+3c_2+3c_3)x^3+c_1x^5$$

という線形写像が得られる．

本節の最後に，『$\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線形写像は，全て左からある $m \times n$ 行列を掛けるという線形写像として書ける』ということを証明しよう．これも次の単元で非常に重要な内容となる．$\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線形写像全体のなす集合を

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \coloneqq \{f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \mid f \text{ は線形写像 }\}$$

とする．このとき，第 11 回講義資料命題 11.3 で定義した線形写像の和とスカラー倍により，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となるのであった (第 11 回講義資料 p.5 注意 1)．

$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対して，$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

で定まる線形写像とする (第 11 回講義資料例 1 参照)．このとき，以下の定理が成立する：

定理 12.5

m, n を正の整数とする． このとき，任意の線形写像 $f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ に対し，ある $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ がただ 1 つ存在して，$f = f_A$ となる．さらに，

$$f_{\bullet} \colon \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m),\ A \mapsto f_A$$

は全単射線形写像である．

証明． 混乱を避けるために第 i 成分のみが 1 で他の成分が 0 の m 次単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i^{(m)} \in \mathbb{K}^m (i = 1, \ldots, m)$，第 j 成分のみが 1 で他の成分が 0 の n 次単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_j^{(n)} \in \mathbb{K}^m (j = 1, \ldots, n)$ と書くことにする．ここで，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して $f(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) \in \mathbb{K}^m$ なので，ある $a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, m$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

と書ける．これを列ベクトルとして並べて，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

とおく．このとき，$f_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ であり，

$$f_A(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) = A\boldsymbol{e}_j^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

である．いま $\{\boldsymbol{e}_1^{(n)}, \ldots, \boldsymbol{e}_n^{(n)}\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底なので，(12.2)，(12.3)，命題 12.4 より，

$$f = f_A$$

であることがわかる．また，$f_A = f_{A'}$ となるとき，すべての $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$A\boldsymbol{e}_j^{(n)} = f_A(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) = f_{A'}(\boldsymbol{e}_j^{(n)}) = A'\boldsymbol{e}_j^{(n)}$$

となる必要があり，これは A と A' のすべての列が一致しているということに他ならないので，$f_A = f_{A'}$ のとき，$A = A'$ である．よって，$f = f_A$ を満たす A はただ 1 つである．

さらに，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ に対し，ある $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ が存在して，$f = f_A$ と書けるということは写像 $f_{\bullet}$ の全射性に他ならず，$f_A = f_{A'}$ ならば $A = A'$ であるという事実は $f_{\bullet}$ の単射性に他ならない．よって，あとは $f_{\bullet}$ が線形写像であることを示せばよい．つまり，任意の $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$f_{A+A'} = f_A + f_{A'} \qquad\qquad f_{cA} = cf_A$$

となることを示せばよい．任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，

$$\begin{aligned} f_{A+A'}(\boldsymbol{v}) &= (A+A')\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + A'\boldsymbol{v} = f_A(\boldsymbol{v}) + f_{A'}(\boldsymbol{v}) = (f_A + f_{A'})(\boldsymbol{v}) \\ f_{cA}(\boldsymbol{v}) &= (cA)\boldsymbol{v} = c(A\boldsymbol{v}) = cf_A(\boldsymbol{v}) = (cf_A)(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となるので，示すべきことは全て示された． □

例 4. $\mathbb{K}^3$ の成分を入れ替える写像 $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$ は線形写像である (確認は容易なので各自チェックすること)．このとき，

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので ((12.2) 式に対応)，これを並べて

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$f = f_A$ である．実際，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

である．

12.2 ベクトル空間の同型

線形写像のうち全単射のものは同型写像と呼ばれる．同型写像で結ばれた 2 つのベクトル空間は同型であるといい，同型なベクトル空間は大雑把に言えば “ベクトル空間としては同じもの” として扱うことができる．この節の最後には実は有限次元ベクトル空間は $\mathbb{K}^n$ というものと必ず同型になってしまうということを証明する (定理 12.9).

定義 12.6

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．全単射線形写像 $f\colon V \to W$ のことを，**(線形) 同型写像**という．線形同型写像 $f\colon V \to W$ が存在するとき，V と W は**同型である**といい，$V \simeq W$ と書く．

例 5. 第 11 回講義資料例 8 で解説したように，P が n 次正則行列であるとき，

$$f_P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$$

は線形同型写像である．また，$(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$ となるのであった．

例 6. 転置写像

$$T\colon\ \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^tA$$

は線形写像であった (第 11 回講義資料例 4)．これは線形同型写像である．実際，${}^t({}^tA) = A$ なので，転置写像

$$T\colon\ \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^tA$$

が上の転置写像の逆写像であり (上の転置写像と定義域と値域が入れ替わっていることに注意)，T は全単射である．よって，$\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ である．

例 7. 定理 12.5 で述べた線形写像

$$f_\bullet\colon \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m),\ A \mapsto f_A$$

は全単射線形写像であったので線形同型写像である． つまり，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ である．この線形同型写像 $f_\bullet$ で移りあうものを同一視することで『$m \times n$ 行列は線形写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を表すものである』という解釈ができるようになる[*1]．

命題 12.7

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形同型写像とする．このとき，f の逆写像 $f^{-1}\colon W \to V$ も線形同型写像である．

証明． 全単射写像の逆写像が再び全単射写像であることは写像の構成から容易にわかるので，ここでは f^{-1} が線形写像となることを示す．任意の 2 元 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ をとると，

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}')) = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}' &= f(f^{-1}(\boldsymbol{w})) + f(f^{-1}(\boldsymbol{w}')) \\ &= f(f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる．よって，両辺の f^{-1} による行き先を考えると，

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') = f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}')$$

となる．次に，$c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w} \in W$ とすると，

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(c\boldsymbol{w})) = c\boldsymbol{w} &= cf(f^{-1}(\boldsymbol{w})) \\ &= f(cf^{-1}(\boldsymbol{w})) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる．よって，両辺の f^{-1} による行き先を考えると，

$$f^{-1}(c\boldsymbol{w}) = cf^{-1}(\boldsymbol{w})$$

となる．以上より，f^{-1} は線形写像である． □

次は与えられた線形写像が同型であるかどうかを判定する際に便利な命題である．線形写像の定義域と値域の次元の一致が事前にわかっているような状況であれば，全射性あるいは単射性のどちらか一方のみから全単射性が従う：

命題 12.8

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n$ であるとする．$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) f が単射であるならば，f は線形同型写像である．つまり，このとき全射性は自動的に従う．
(2) f が全射であるならば，f は線形同型写像である．つまり，このとき単射性は自動的に従う．

証明．

(1) f は単射なので，命題 12.1 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} f(V) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f$$

である．ここで $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間なので，このとき $\mathrm{Im}\, f = W$ となる (ここの議論については，第 10 回本レポート課題問題 4 補足解説参照)．よって，f は全射でもある．

[*1] 例えば二次形式を表すものとしても (実対称) 行列は大事な形で現れていたので，この解釈が唯一の "良い解釈" であるという言い方はできない．ただ，重要な解釈であることは間違いない．

(2) 第 11 回講義資料命題 11.7 より，f の単射性を言うためには $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ であることを言えばよいので，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ としたとき $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となることを言えばよい．$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を V の基底とする．このとき，基底の定義条件 (b2) より，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

となる．いま $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ なので，

$$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{v}) = c_1 f(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{b}_n) \tag{12.4}$$

である．一方，f の全射性より，

$$W = \mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{f(\boldsymbol{b}_1), \ldots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$$

となる．いま，W は n 次元なので，第 10 回講義資料定理 10.9 より，$\{f(\boldsymbol{b}_1), \ldots, f(\boldsymbol{b}_n)\}$ は一次独立である．よって (12.4) より，

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

となる．つまり，このとき $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である． □

以下の定理は，有限次元ベクトル空間に対しては『次元が等しいこと』と『同型になること』が同値であるということを主張している．つまり，『同型であるものを同じと見なすことにすると，n 次元ベクトル空間は本質的には $\mathbb{K}^n$ しかない』ということを主張している．この定理は “一般のベクトル空間も $\mathbb{K}^n$ のように扱える”(これまで $\mathbb{K}^n$ で勉強してきたことを応用できる！) ということを保証している重要な定理である．

定理 12.9

V と W を有限次元ベクトル空間とする．このとき，

$$V \simeq W \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$$

である．特に，任意の $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間 V は $\mathbb{K}^n$ と同型である．

証明.

$\Rightarrow$ 方向： 定義より $V \simeq W$ であるということは，全単射線形写像 $f\colon V \to W$ が存在するということである．系 12.3 より，$\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき全射線形写像 $V \to W$ は存在せず，$\dim_{\mathbb{K}} V > \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき単射線形写像 $V \to W$ は存在しないので，全単射線形写像 $V \to W$ が存在するのであれば，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ である．

$\Leftarrow$ 方向： $n = \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ とし，$B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\}$ を W の基底とする．このとき，命題 12.4 より線形写像 $F\colon V \to W,\ G\colon W \to V$ であって，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$F(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{b}'_i \qquad G(\boldsymbol{b}'_i) = \boldsymbol{b}_i$$

を満たすものが存在する．このとき定義より，

$$G \circ F = \mathrm{id}_V \qquad F \circ G = \mathrm{id}_W$$

となる．よって，F, G は全単射であり，線形同型写像である．よって，$V \simeq W$． □

注意 3. 定理 12.9 の証明で構成したように，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ のとき，V と W の間の線形同型写像は V の基底 B，W の基底 B' をとるごとに作ることができる．$\{\boldsymbol{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間の基底の取り方は一般に無限にあるので，このような同型写像も無限に作ることができる．

例 8. 2 次以下の 1 変数多項式全体のなす集合

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ の部分空間となり (第 9 回講義資料例 11)，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = 3$ であった (第 10 回講義資料例 18)．これより，定理 12.9 から，

$$\mathbb{K}^3 \simeq \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$$

である．具体的に線形同型写像 $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ を 2 通り構成しよう．いま，

$$\{1, x, x^2\} \qquad \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$$

は共に $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であった (第 10 回講義資料例 18，例 21)．これより，

$$\begin{aligned}
F_1 \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \\
F_2 \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1(-3 + 2x + 2x^2) + c_2(x - x^2) + c_3(-1 + x - x^2) \\
& \qquad\qquad = (-3c_1 - c_3) + (2c_1 + c_2 + c_3)x + (2c_1 - c_2 - c_3)x^2
\end{aligned}$$

はいずれも線形同型写像となる．

最後に線形同型写像と行列の正則性との関係について述べておこう．

命題 12.10

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，

$$f_A \text{ が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad n = m \text{ かつ } A \text{ が正則行列}$$

である．

証明.

$\Leftarrow$ 方向： 第 11 回講義資料例 8 で既に証明した．

$\Rightarrow$ 方向： まず，$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が線形同型写像であるとき，$\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^m$ なので，定理 12.9 より，

$$n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m = m$$

となる．さらに，第 11 回講義資料例 8 より，f_A が単射のとき $\operatorname{rank} A = n$．$n$ 次正方行列 A が $\operatorname{rank} A = n$ を満たすことは A が正則であることと同値であったので (線形代数 I の内容．第 1 回本レポート課題解答問題 4 補足解説参照)，このとき A は正則である． □

例 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$\det A = 1 \neq 0$ なので，A は正則であるから， 例 4 の線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3,\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

は線形同型写像である．

線形代数 II 第 13 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回はまず次元定理と呼ばれる線形写像の像と核の次元の関係に関する定理について解説を行う．そしてこの定理を元に，行列のランクについて線形空間論からの新しい解釈を与える．これにより，行列のランクは列基本変形を用いても計算できるということがわかる．

後半では本講義全体の後半部分の肝とも言える『表現行列』について解説を行う (この話題は次回も続く)．これにより，抽象的な線形写像もこれまで勉強してきた行列を用いて具体的に計算ができるようになる．これは線形代数を他の分野に応用するにあたって非常に基本的かつ重要な考え方であるので，しっかりと学んでもらいたい．

13.1　次元定理

定理 13.1(次元定理)

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$f\colon V \to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

が成立する．

証明． $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s\}$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底，$\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t\}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする (命題 12.2 より，V が有限次元のとき，$\operatorname{Im} f$ も有限次元であることに注意する)．このとき，特に $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = s, \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = t$ である．各 $i = 1, \ldots, t$ に対して $\boldsymbol{w}_i \in \operatorname{Im} f$ なので，ある $\boldsymbol{v}_i \in V$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$$

となる．このとき，

$$B \coloneqq \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t\}$$

が V の基底であることを証明する．これが証明できれば，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = s + t = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

となり，定理が示される．

<u>B が一次独立であること：</u> ある $c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots d_t\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{0} \tag{13.1}$$

となったと仮定する．命題 11.2 より $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= f(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots d_t\boldsymbol{v}_t) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_s f(\boldsymbol{u}_s) + d_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots d_t f(\boldsymbol{v}_t) \\ &= d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots d_t\boldsymbol{w}_t \qquad (\boldsymbol{u}_j \text{が} \operatorname{Ker} f \text{ の元であることと } \boldsymbol{v}_i \text{の定義より}).\end{aligned}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

ここで，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ は $\operatorname{Im} f$ の基底なので一次独立であるから，このとき

$$d_1 = \cdots = d_t = 0.$$

よって，(13.1) は，

$$d_1 = \cdots = d_t = 0 \quad \text{かつ} \quad c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}$$

と同値である．さらに $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底なので一次独立であるから，このとき

$$c_1 = \cdots = c_s = 0.$$

以上より，(13.1) は

$$c_1 = \cdots = c_s = d_1 = \cdots = d_t = 0$$

を導くので，B は一次独立である．

<u>B が V を生成すること：</u> $\boldsymbol{v}$ を V の任意の元としたとき，$\boldsymbol{v}$ が B の元の一次結合で書けることを示せばよい．$f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$ なので，$f(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ の一次結合として，

$$f(\boldsymbol{v}) = d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{w}_t$$

と書ける．この $d_1, \ldots, d_t \in \mathbb{K}$ を用いて，

$$\boldsymbol{v}' := \boldsymbol{v} - d_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{v}_t$$

と置く．このとき，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v} - d_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{v}_t) \\ &= f(\boldsymbol{v}) - d_1 f(\boldsymbol{v}_1) - \cdots - d_t(\boldsymbol{v}_t) \\ &= f(\boldsymbol{v}) - d_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - d_t\boldsymbol{w}_t \qquad (\boldsymbol{v}_i \text{の定義より}) \\ &= \boldsymbol{0} \qquad (d_1, \ldots, d_t \text{の定義より}). \end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{v}' \in \operatorname{Ker} f$ なので，$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ の一次結合として

$$\boldsymbol{v}' = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s$$

と書ける．以上より，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{v}_t = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s + d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_t\boldsymbol{v}_t$$

となるので，$\boldsymbol{v}$ は確かに B の元の一次結合で書けることがわかる． □

注意 1. 次元定理より，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f$$

となることがわかる．これは，“f によって V から $\operatorname{Ker} f$ の分がつぶされて $\operatorname{Im} f$ が得られる” というようにとらえておくとよい．この主張は商ベクトル空間という概念を学ぶと定式化され，

$$V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

という同型として述べられる (左辺が商ベクトル空間)．商ベクトル空間は本講義では扱わないが重要な概念なので，気になる方は調べてみて欲しい[*1]．

[*1] 2 年生の代数学 I で少し解説する．

例 1. 線形写像

$$f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}),\quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

の像

$$\mathrm{Im}\, f \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K} \right\}$$

の次元を計算してみよう．次元定理より，$\mathrm{Ker}\, f$ の次元がわかれば良い．

$$f\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 = 0 \\ 5c_2 + 4c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + 8c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この連立一次方程式を解くと (第 10 回レポート課題問題 3 解答例参照)，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意パラメータ}).$$

よって，

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = 1$．これより，次元定理から，

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^4 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = 4 - 1 = 3.$$

例 2. V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元とする．$f\colon V \to W$ が単射線形写像であるとき，命題 11.7 より $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$ なので，次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f.$$

これは，命題 12.1 で述べた主張に他ならない．

次に次元定理を用いて，行列のランクの新しい解釈を与えておこう．

定理 13.2

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと (つまり $A = (\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$)，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

である．さらに，

$$\mathrm{rank}\, A = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A$$

となる．

証明. 像の定義より，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f_A = \{f_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} &= \left\{ A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \{x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}.\end{aligned}$$

よって，1 つめの等式は示された．次に次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A.$$

ここで，定理 10.10 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A$$

である (定理 10.10 の W_A は定義から $\operatorname{Ker} f_A$ に他ならないことに注意)．よって，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A.$$

□

この定理をもとに一般の線形写像に対してもランクを以下のように定義する．

定義 13.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f \coloneqq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

とし，これを f の**ランク (または階数)** という．

例 3. 例 1 での計算より，線形写像

$$f\colon \mathbb{K}^4 \to \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}),\quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

のランクは，

$$\operatorname{rank} f = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = 3$$

である．

線形写像 f_A の像の基底の計算方法について

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき $\operatorname{Im} f_A$ の基底を具体的に求める方法を考える．P を n 次正則行列とすると，命題 12.10 より，

$$f_P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$$

は同型写像なので，特に全射であるから，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f_A \circ f_P) &\coloneqq \{f_A(f_P(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{f_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} \quad (f_P\text{は全射なので，全ての } \mathbb{K}^n\text{の元は } f_P(\boldsymbol{x}) \text{ の形で書けるため}) \\ &= \operatorname{Im} f_A\end{aligned}$$

である．さらに，第 11 回講義資料例 7 より，

$$f_A \circ f_P = f_{AP} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto AP\boldsymbol{x}$$

となる．よって，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Im} f_{AP} \tag{13.2}$$

であり，$\operatorname{Im} f_A$ の基底を求めることは，$\operatorname{Im} f_{AP}$ の基底を求めることと同じである．

ここで，A に列基本変形を繰り返し施すことを考える．列基本変形とは以下の変形であった：

(I) A のある列の定数倍を他の列に加える．

(II) A のある列に 0 でない定数を掛ける．

(III) A の 2 つの列を入れ替える．

行基本変形のときと同様，これらの変形は A に<u>右から</u>ある n 次正則行列を掛けることで実現される．例えば以下のようになる：

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 1 列目に 3 列目の t 倍を加えると，$\begin{pmatrix} 1+3t & 2 & 3 \\ 4+6t & 5 & 6 \\ 7+9t & 8 & 9 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1+3t & 2 & 3 \\ 4+6t & 5 & 6 \\ 7+9t & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 列目を t 倍 $(t \neq 0)$ すると，$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 3 \\ 4 & 5t & 6 \\ 7 & 8t & 9 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 3 \\ 4 & 5t & 6 \\ 7 & 8t & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 列目と 3 列目を入れ替えると，$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より，この操作は正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を右から掛けることで実現できる．

これより，A の列基本変形を繰り返して A' が得られたとすると，(13.2) より，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Im} f_{A'}$$

である．列基本変形を用いて行基本変形と同様の掃き出し法を考えることによって，A を以下の形の階段行列 A' にできる：

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ * & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \cdots \\ * & 1 & 0 & \cdots \\ * & * & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots \\ * & * & 1 & \cdots \\ * & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}'_s \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0})$$

このとき，A' の $\mathbf{0}$ でない列ベクトルたち $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_s$ は一次独立であり (証明は列ベクトルの形から容易なのでここでは省略する．定理 10.10 の証明参照．)，定理 13.2 より，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Im}\, f_{A'} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_s\}$$

となって $\mathrm{Im}\, f_A$ を生成するので，これは $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底である．以上をまとめて書くと，

> $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底は A を列基本変形で階段行列にし，その結果得られた行列の列ベクトルのうち $\mathbf{0}$ でないものを全て取ってくることで得られる

ということがわかる．特に，$\mathrm{Im}\, f_A$ の次元は列基本変形で得られた階段行列の段の数であり，定理 13.2 より，これは $\mathrm{rank}\, A$ に等しい．これより，

> これまで $\mathrm{rank}\, A$ は行基本変形で階段行列にしてその段の数を数えていたが，列基本変形で階段行列にしてその段の数を数えることで求めても良い

ということがわかる．

例 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

として，線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^4,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき

$$\mathrm{Im}\, f_A = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 + 2c_5 \\ -c_1 - 2c_2 + 2c_3 + 4c_4 - c_5 \\ -2c_1 - 4c_2 + 2c_3 + 2c_4 - 3c_5 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_4 \end{pmatrix} \middle| \ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{K} \right\}$$

の基底を具体的に求めてみよう．A を列基本変形で階段行列にすると以下のようになる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4,5 列に加える}]{\text{第 1 列の}-2\text{ 倍,}1\text{ 倍,}1\text{ 倍,}-2\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 4,5 列に加える}]{\text{第 3 列の}-3\text{ 倍,}-1\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列と第 3 列を入れ替える}]{\text{第 2 列と第 3 列を入れ替えた後,}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，求める $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底の 1 つは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

である．とくに，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A = 3 (= \mathrm{rank}\, A)$ である．ちなみに，次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f_A = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^5 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A = 5 - 3 = 2$$

である (第 10 回講義資料例 22 の計算と比較せよ)．

13.2　表現行列 (その 1)

以下では，$\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列 A に対し，f_A と書くと，常に線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を意味することとする．

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．線形写像 $f \colon V \to W$ を行列に対応する線形写像 f_A を用いて表すことを考えよう．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とする．このとき命題 12.4 より，線形写像

$$\psi_B \colon \mathbb{K}^n \to V \qquad \psi_{B'} \colon \mathbb{K}^m \to W$$

で

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j,\ j = 1, \ldots, n \qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{13.3}$$

を満たすものがそれぞれただ 1 つ存在する．このとき，$\psi_B, \psi_{B'}$ はいずれも基底を基底に送る写像なので，線形同型写像である (例えば定理 12.9 の証明の $\Leftarrow$ 方向参照)．命題 12.7 より $\psi_{B'}^{-1} \colon W \to \mathbb{K}^m$ も線形同型写像であり，さらに命題 11.3 (3) より線形写像の合成は線形写像なので，線型写像 $f \colon V \to W$ に対し，

$$\psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

という線形写像が定義できる．このとき，定理 12.5 より，

$$f_A = \psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B \tag{13.4}$$

を満たす $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ がただ 1 つ定まる．この A を**基底 B, B' に関する f の表現行列**という．図式で表すと以下のようになっている：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\psi_{B'}^{-1}", "\wr"'] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\psi_B", "\wr"'] \arrow[r, "f_A"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

もう少し具体的に表現行列を求める方法を考えてみよう．$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ であったので，A は $m \times n$ 行列である (n は V の次元，m は W の次元である)．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書くことにする．このとき，$f = \psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$ であることに注意すると，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_j) &= \psi_{B'}(f_A(\psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}_j))) \\ &= \psi_{B'}(f_A(\boldsymbol{e}_j)) \\ &= \psi_{B'}(A\boldsymbol{e}_j) \\ &= \psi_{B'}\left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\right) \\ &= \psi_{B'}\left(a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m\right) \\ &= a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

となる．よって，以下がわかる：

基底 $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する f の表現行列の第 j 列目は $f(\boldsymbol{v}_j)$ を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の一次結合で書いた時の各係数を順に並べたものとなる．

この関係を形式的に[*2]行列の掛け算のルールを用いて，

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13.5}$$

というようにも書く．W が $\mathbb{K}^m$ のときは (形式的ではなく通常の) 行列の等式である．

例 5. V と W を $\dim_{\mathbb{K}} V = 4, \dim_{\mathbb{K}} W = 3$ であるような $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ を W の基底とし，線形写像 $f\colon V \to W$ が

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 + 3\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 2\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= 2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + 5\boldsymbol{w}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_4) &= 3\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 \end{aligned}$$

で定まっているとする．このとき，基底 B, B' に関する f の表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

である．(13.5) の表記法を用いると，

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) & f(\boldsymbol{v}_3) & f(\boldsymbol{v}_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

である．$f(\boldsymbol{v}_j)$ らと $\boldsymbol{w}_i$ らの関係が簡潔に表されているということがわかるであろう．

[*2] $f(\boldsymbol{v}_j)$ や $\boldsymbol{w}_i$ は一般のベクトル空間の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^m$ の元ではないが形式的にこれを並べて，行列のように扱っているという意味．

例 6. $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

をとる．このとき，

$$f_A(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m$$

となるので，$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ の $E_n \coloneqq \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}, E_m \coloneqq \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m\}$ に関する表現行列は A である．実際『線形写像に対する表現行列』のお手本となっているのは，『f_A に対する A』である．この関係を頭に入れておくと，線形写像 f から表現行列を取り出す方法を覚えられるだろう．

では一般に，$B = \{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底，$B' = \{\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m\}$ を $\mathbb{K}^m$ の基底としたとき，f_A の B, B' に関する表現行列はどうなるだろうか．

$$P \coloneqq (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n) \qquad Q \coloneqq (\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_m)$$

とおく (命題 4.3 より，これらは正則行列である)．ここで，

$$f_P(\boldsymbol{e}_j) = P\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{p}_j,\ j = 1, \dots, n \qquad f_Q(\boldsymbol{e}_i) = Q\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{q}_i,\ i = 1, \dots, m$$

より，(13.3) と比べると，このとき $\psi_B = f_P, \psi_{B'} = f_Q$ であることがわかる．よって，第 11 回講義資料例 7, 例 8 の計算より，

$$\psi_{B'}^{-1} \circ f_A \circ \psi_B = f_Q^{-1} \circ f_A \circ f_P = f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P = f_{Q^{-1}AP}$$

となる．よって，表現行列の定義 (13.4) より，f_A の B, B' に関する表現行列は $Q^{-1}AP$ である．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，f_A の $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

f_A の $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

例 7. 最後に表現行列の応用例を見ておこう．$\mathbb{K}$ の元を係数とする 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 2} \coloneqq \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

とする (第 9 回講義資料例 11)．ここで，次のような写像を考えてみる：

$$F \colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (1 + x + x^2)f''(x) + 2xf'(x) + f(1).$$

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分したもの，$f''(x)$ は $f(x)$ を 2 階微分したものである．例えば,

$$F(1 + 3x + x^2) = (1 + x + x^2) \cdot 2 + 2x(3 + 2x) + (1 + 3 \cdot 1 + 1^2) = 7 + 8x + 6x^2$$

である．この F は線形写像となる (各自チェックせよ)．このとき F を一般の元 $a+bx+cx^2$ に n 回施した

$$F^n(a+bx+cx^2) \coloneqq (\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n\text{ 回}})(a+bx+cx^2)$$

はどうなるだろうか？ これを表現行列の考え方を用いて求めてみる．$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底の 1 つとして $B = \{1, x, x^2\}$ が取れる (第 10 回講義資料例 15)．このとき，

$$\begin{aligned} F(1) &= (1+x+x^2)\cdot 0 + 2x \cdot 0 + 1 = 1 \\ F(x) &= (1+x+x^2)\cdot 0 + 2x \cdot 1 + 1 = 1+2x \\ F(x^2) &= (1+x+x^2)\cdot 2 + 2x \cdot 2x + 1 = 3+2x+6x^2 \end{aligned}$$

より，F の B(定義域も値域も) に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

である．((13.5) の表記法を用いると，$(F(1)\ F(x)\ F(x^2)) = (1\ x\ x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ である.)(13.3) にならって，

$$\psi_B \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ \boldsymbol{e}_1 \mapsto 1,\ \boldsymbol{e}_2 \mapsto x,\ \boldsymbol{e}_3 \mapsto x^2,$$

という線形写像を考えると，表現行列の定義より

$$F = \psi_B \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$$

なので，

$$\begin{aligned} F^n(a+bx+cx^2) &= (\underbrace{(\psi_B \circ f_A \circ \cancel{\psi_B^{-1}}) \circ (\cancel{\psi_B} \circ f_A \circ \cancel{\psi_B^{-1}}) \circ \cdots \circ (\cancel{\psi_B} \circ f_A \circ \psi_B^{-1})}_{n\text{ 回}})(a+bx+cx^2) \\ &= (\psi_B \circ \underbrace{f_A \circ f_A \circ \cdots \circ f_A}_{n\text{ 回}} \circ \psi_B^{-1})(a+bx+cx^2) \\ &= \psi_B(f_{A^n}(\psi_B^{-1}(a+bx+cx^2))) \\ &= \psi_B\left(f_{A^n}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\right). \end{aligned}$$

となる．よって，A^n を求めれば良い．このためには A の対角化とそれに用いる正則行列 P を求めれば良いのであった．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -3 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}\right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$

となるので，A の固有値は $1, 2, 6$ である．A は 3 つの相異なる固有値を持つことより，対角化可能である．

固有値 1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 2 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 6 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(6I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 6 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ が取れる．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 + 10 \cdot 2^n & -2 - 5 \cdot 2^n + 7 \cdot 6^n \\ 0 & 10 \cdot 2^n & -5 \cdot 2^n + 5 \cdot 6^n \\ 0 & 0 & 10 \cdot 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる (第 2 回講義資料例 1，例 2 の計算参照)．以上より，

$$
\begin{aligned}
F^n(a+bx+cx^2) &= \psi_B\left(f_{A^n}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \psi_B\left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10+10\cdot 2^n & -2-5\cdot 2^n+7\cdot 6^n \\ 0 & 10\cdot 2^n & -5\cdot 2^n+5\cdot 6^n \\ 0 & 0 & 10\cdot 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\
&= \psi_B\left(\begin{pmatrix} a+(-1+2^n)b+\left((-2+7\cdot 6^n)/10-2^{n-1}\right)c \\ 2^n b+(-2^{n-1}+3\cdot 6^{n-1})c \\ 6^n c \end{pmatrix}\right) \\
&= a+(-1+2^n)b+\left(\frac{-2+7\cdot 6^n}{10}-2^{n-1}\right)c+(2^n b+(-2^{n-1}+3\cdot 6^{n-1})c)x+6^n cx^2
\end{aligned}
$$

となることがわかる．F を n 回施すという複雑な操作の計算が，表現行列の考え方を用いることで行列の n 乗計算に帰着され，行列の対角化を応用することで見事計算できたのである．

線形代数 II 第 14 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回は本講義の最終回である．前回は線形写像 $f\colon V \to W$ が与えられたとき，定義域 V と終域 W の基底を取って f を行列で表すという『表現行列』の考え方について導入を行った．ここで，V と W の基底の取り方は一般には無限にあるので，基底の取り方を変えてみたときに表現行列がどのように変わるのかということが気になるが，この点について今回は解説を行う．これにより，線形代数 I の講義で扱った行・列基本変形，本講義の前半で扱っていた対角化について，線形空間論からの見通し良い理解が得られるようになる．

本資料の最後には，補足として計量ベクトル空間について簡単な解説を行った．$\mathbb{K}^n$ には内積という操作も定まっていたが，ここでは一般のベクトル空間で内積の構造を持ったものというのを定式化する．

14.1　表現行列 (その 2)

以下では，$\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列 A に対し，f_A と書くと，常に線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を意味することとする．次は表現行列に関する基本的な命題である．

命題 14.1

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とし，線形同型写像

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^n \to V \qquad \psi_{B'}\colon \mathbb{K}^m \to W$$

をそれぞれ

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j,\ j = 1, \ldots, n \qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i,\ i = 1, \ldots, m$$

を満たすものとして定義する．$f\colon V \to W$ を線形写像とし，f の B, B' に関する表現行列を A としたとき，以下が成立する．

(1) $\operatorname{Ker} f = \psi_B(\operatorname{Ker} f_A)$．特に，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}} V - \operatorname{rank} A$.

(2) $\operatorname{Im} f = \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A)$．特に，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f (= \operatorname{rank} f) = \operatorname{rank} A$.

(3) f が線形同型写像であるための必要十分条件は A が正則行列であることである．

(4) U を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B'' を U の基底とする．このとき，線形写像 $f'\colon U \to V$ の B'', B に関する表現行列を A' とすると，線形写像 $f \circ f'\colon U \to W$ の B'', B' に関する表現行列は AA' である．

証明． まず，基底 B, B' に関する f の表現行列の定義より，

$$f = \psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$$

である．以下では，混乱を避けるためにベクトル空間 X における零元 $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}_X$ というように書くことにする．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

このとき，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f_A(\psi_B^{-1}(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^m}\} \quad (\psi_{B'}^{-1}(\mathbf{0}_W) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^m}\text{なので}) \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f_A\} \\
&= (\psi_B^{-1})^{-1}(\operatorname{Ker} f_A) = \psi_B(\operatorname{Ker} f_A).
\end{aligned}
$$

よって，(1) は示された．なお，後半の主張は命題 12.1 と定理 10.10 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}} \psi_B(\operatorname{Ker} f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A = \dim_{\mathbb{K}} V - \operatorname{rank} A$$

となることよりわかる (定理 10.10 の W_A は定義から $\operatorname{Ker} f_A$ に他ならないことに注意)．

さらに，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = (\psi_{B'} \circ f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) = (f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{が存在して，} \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) = f_A(\boldsymbol{x})\} \quad (\psi_B^{-1}\text{は全射なので}) \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \psi_{B'}^{-1}(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Im} f_A\} \\
&= (\psi_{B'}^{-1})^{-1}(\operatorname{Im} f_A) = \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A).
\end{aligned}
$$

よって，(2) も示された．なお，後半の主張は命題 12.1 と定理 13.2 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \psi_{B'}(\operatorname{Im} f_A) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$$

となることよりわかる．

次に，命題 12.10 より，

$$f \text{ が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad f_A\text{が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ が正則行列}$$

である (1 つめの同値性は $\psi_B, \psi_{B'}$ が線形同型写像であることと，線形同型写像と線形同型写像の合成が線形同型写像であることより)．これより，(3) も示された．

最後に (4) を示す．$B'' = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_\ell\}$ とし，$\psi_{B''} \colon \mathbb{K}^\ell \to U$ を $\psi_B, \psi_{B'}$ と同様に，

$$\psi_{B''}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_k,\ k = 1, \ldots, \ell$$

を満たす線形同型写像として定義する．このとき，$f' \colon U \to V$ の B'', B に関する表現行列の定義より，

$$f_{A'} = \psi_B^{-1} \circ f' \circ \psi_{B''}.$$

よって，

$$f_{AA'} = f_A \circ f_{A'} = (\psi_{B'}^{-1} \circ f \circ \psi_B) \circ (\psi_B^{-1} \circ f' \circ \psi_{B''}) = \psi_{B'}^{-1} \circ (f \circ f') \circ \psi_{B''}.$$

これより，定義から AA' が線形写像 $f \circ f' \colon U \to W$ の B'', B' に関する表現行列である． □

注意 1. 命題 14.1 (1), (2) より，V, W の基底が取れている状況だと，線形写像 $f \colon V \to W$ の核や像の基底は f_A の核や像の基底が求められれば具体的に求められるということがわかる (それぞれ $\psi_B, \psi_{B'}$ で送ってやれば良い)．f_A の形の線形写像の核の基底の求め方は定理 10.10 で，像の基底の求め方は第 13 回講義資料 p.4–6 で解説しているので思い出しておこう．これにより，一般の線形写像 $f \colon V \to W$ の核や像の基底を求める方法が原理的には与えられたことになる[*1]．

[*1] 現実の問題に現れる行列は巨大なサイズであることがしばしばあり，実際にはコンピュータを用いても計算が難しいということが起こる．このため，ここでは “原理的に” と書いた．このような数値計算上の問題については私は専門外なのでここでは解説を避け，とにかく線形代数の講義としては有限回のステップで厳密に求める方法があるということを述べるにとどめておく．

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V\to W$ の表現行列は V,W の基底の取り方に依っている．そこで，基底を取り替えたときに，表現行列がどのように変わるかを見ておこう．

まず，基底の変換の表し方について説明しておこう．$B=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}, B'=\{\boldsymbol{v}'_1,\dots,\boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底とする．このとき，線形同型写像

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^n\to V,\qquad \psi_{B'}\colon \mathbb{K}^n\to V$$

をそれぞれ

$$\psi_B(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{v}_j,\ j=1,\dots,n,\qquad \psi_{B'}(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{v}'_j,\ j=1,\dots,n,$$

を満たすものとして定義する．このとき，

$$\psi_B^{-1}\circ\psi_{B'}\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n,$$

は線形同型写像なので，定理 12.5(と命題 12.6) より，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$f_P=\psi_B^{-1}\circ\psi_{B'}$$

となる．この P がどういった行列なのかということをもう少し見てみよう．

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

と書く．このとき，$\psi_B\circ f_P=\psi_{B'}$ より，各 $j=1,\dots,n$ に対して，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'_j&=\psi_{B'}(\boldsymbol{e}_j)\\ &=(\psi_B\circ f_P)(\boldsymbol{e}_j)\\ &=\psi_B(P\boldsymbol{e}_j)\\ &=\psi_B(p_{1j}\boldsymbol{e}_1+p_{2j}\boldsymbol{e}_2+\cdots+p_{nj}\boldsymbol{e}_n)\\ &=p_{1j}\boldsymbol{v}_1+p_{2j}\boldsymbol{v}_2+\cdots+p_{nj}\boldsymbol{v}_n\end{aligned}\tag{14.1}$$

となる．つまり，P は新しい基底と元の基底の変換を表す行列である．B と B' の基底の関係 (14.1) は，形式的に[*2]行列の掛け算のルールを用いて，

$$(\boldsymbol{v}'_1\ \boldsymbol{v}'_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}'_n)=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P\tag{14.2}$$

というように書く．この P を B **から** B' **への基底の変換行列**という．

ここで，$\psi_B^{-1}\circ\psi_{B'}=f_P$ のとき，

$$\psi_{B'}^{-1}\circ\psi_B=(\psi_B^{-1}\circ\psi_{B'})^{-1}=(f_P)^{-1}=f_{P^{-1}}$$

なので，B から B' への基底の変換行列が P のとき，B' から B への基底の変換行列は P^{-1} であることも注意しておこう．

例 1. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間を $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ と書く．このとき，$B=\{1,x,x^2\}, B'=\{-3+2x+2x^2, x-x^2, -1+x-x^2\}$ は共に $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であった (第 10 回講義資料例 15，例 21 参照)．このとき，

$$\begin{aligned}-3+2x+2x^2&=-3\cdot 1+2\cdot x+2\cdot x^2\\ x-x^2&=0\cdot 1+1\cdot x+(-1)\cdot x^2\\ -1+x-x^2&=(-1)\cdot 1+1\cdot x+(-1)\cdot x^2\end{aligned}$$

[*2] $\boldsymbol{v}_j$ や $\boldsymbol{v}'_j$ は一般のベクトル空間 V の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^m$ の元ではないが，形式的にこれを並べて行列のように扱っているという意味．V が $\mathbb{K}^n$ のときは，通常の意味での行列の等式になる．

なので (これが (14.1) 式に対応)，B から B' への基底の変換行列 P は，

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．(14.2) の表記を用いると，

$$\begin{pmatrix} -3+2x+2x^2 & x-x^2 & -1+x-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．この例からこの表記がもっともらしい表記であることが見て取れるだろう．

例 2. $B' = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$\boldsymbol{p}_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

となるので，$B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ から B' への基底の変換行列は，

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$$

である．

以下が基底の取り換えによる表現行列の変化規則である．

定理 14.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．$B_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, B_1' = \{\boldsymbol{v}_1', \ldots, \boldsymbol{v}_n'\}$ を V の基底，$B_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}, B_2' = \{\boldsymbol{w}_1', \ldots, \boldsymbol{w}_m'\}$ を W の基底とする．B_1, B_2 に関する f の表現行列を A とし，B_1', B_2' に関する f の表現行列を A' とする．ここで，B_1 から B_1' への基底の変換行列を P，B_2 から B_2' への基底の変換行列を Q としたとき，

$$A' = Q^{-1}AP$$

である．つまり，

$$(\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n') = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P \qquad (\boldsymbol{w}_1' \ \boldsymbol{w}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m') = (\boldsymbol{w}_1 \ \boldsymbol{w}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m)Q$$

であるとき，

$$(f(\boldsymbol{v}_1') \ f(\boldsymbol{v}_2') \ \cdots \ f(\boldsymbol{v}_n')) = (\boldsymbol{w}_1' \ \boldsymbol{w}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{w}_n')Q^{-1}AP$$

である．

証明.

$$\psi_{B_1}\colon \mathbb{K}^n \to V, \quad \psi_{B_1'}\colon \mathbb{K}^n \to V, \quad \psi_{B_2}\colon \mathbb{K}^m \to W, \quad \psi_{B_2'}\colon \mathbb{K}^m \to W,$$

をこれまでと同様に定義 (第 13 回講義資料 (13.3) 参照) すると，表現行列の定義 (第 13 回講義資料 (13.4))

より，

$$
\begin{aligned}
f &= \psi_{B_2} \circ f_A \circ \psi_{B_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ (\psi_{B'_2}^{-1} \circ \psi_{B_2}) \circ f_A \circ (\psi_{B_1}^{-1} \circ \psi_{B'_1}) \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ (\psi_{B_2}^{-1} \circ \psi_{B'_2})^{-1} \circ f_A \circ (\psi_{B_1}^{-1} \circ \psi_{B'_1}) \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P \circ \psi_{B'_1}^{-1} \\
&= \psi_{B'_2} \circ f_{Q^{-1}AP} \circ \psi_{B'_1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

となる．よって，B'_1, B'_2 に関する f の表現行列の定義より，

$$A' = Q^{-1}AP$$

である． □

定理 14.2 の主張は以下の図式にまとめられる：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\psi_{B_1}"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m \arrow[dd, bend left=60, "f_{Q^{-1}}", "\wr"'] \\
V \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "\psi_{B_2}^{-1}", "\wr"'] \arrow[d, "\psi_{B'_2}^{-1}", "\wr"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\psi_{B'_1}"', "\wr"] \arrow[r, "f_{Q^{-1}AP}"] \arrow[uu, bend left=60, "f_P", "\wr"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

ここで，左から正則行列を掛ける操作は行基本変形の繰り返しで与えられ，右から正則行列を掛ける操作は列基本変形の繰り返しで与えられたということを思い出すと，『行基本変形の繰り返しを考えることは終域の基底を取り替える操作に対応し，列基本変形の繰り返しを考えることは定義域の基底を取り替える操作に対応する』ということがわかる．

例 3. 例 2 の対応より， 第 13 回講義資料例 6 の例は，定理 14.2 の公式の $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m, B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, B'_1 = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}, B_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}, B'_2 = \{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_m\}$ の場合の例を与えている．

例 4. 1 次以下，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間をそれぞれ $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}, \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ とする．ここで，

$$B_1 \coloneqq \{1, x\}, \quad B'_1 \coloneqq \{1+x, x\}, \quad B_2 \coloneqq \{1, x, x^2\}, \quad B'_2 \coloneqq \{-1+x^2, -x+x^2, x^2\}$$

とすると，B_1, B'_1 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ の基底，B_2, B'_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底となる．さらに，

$$\begin{pmatrix} 1+x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1+x^2 & -x+x^2 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，B_1 から B'_1 への基底の変換行列は $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B_2$ から B'_2 への基底の変換行列は $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である．ここで線形写像 $F \colon \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ を

$$f(x) \mapsto xf(x) - f(x)$$

で定義する．このとき，

$$
\begin{aligned}
F(1) &= x - 1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x) &= x^2 - x = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2
\end{aligned}
$$

となるので，F の B_1, B_2 に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．一方，定理 14.2 より，F の B_1', B_2' に関する表現行列は，

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

14.2　線形変換

線形写像のうち定義域と終域が同じもの $f\colon V \to V$ を以下では**線形変換**と呼ぶ．また，線形変換を考える際には定義域の基底と終域の基底はいつも共通のものに取ることにする．$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底としたとき，線形変換 $f\colon V \to V$ の B, B に関する表現行列を，単に**線形変換** $f\colon V \to V$ **の** B **に関する表現行列**ということにする．命題 14.1，定理 14.2 より，以下は直ちに導かれる：

定理 14.3

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．$f\colon V \to V$ を線形変換とし，f の B に関する表現行列を A とする．このとき，以下が成立する．

(1) $f'\colon V \to V$ を線形変換とし，f' の B に関する表現行列を A' としたとき，線形変換 $f \circ f'\colon V \to V$ の B に関する表現行列は AA' である．特に，$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 回}}\colon V \to V$ の B に関する表現行列は A^n である．

(2) $B' = \{\boldsymbol{v}_1', \ldots, \boldsymbol{v}_n'\}$ を V の基底とし，f の B' に関する表現行列を A'，B から B' への基底の変換行列を P としたとき，

$$A' = P^{-1}AP$$

である．つまり，

$$(\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n') = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P$$

であるとき，

$$(f(\boldsymbol{v}_1') \ f(\boldsymbol{v}_2') \ \cdots \ f(\boldsymbol{v}_n')) = (\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n')P^{-1}AP$$

である．

定理 14.3 (2) は，定理 5.4 の $\mathbb{K}^n$ を V にした一般化である．定理 5.4 のときは f_A という線形写像や表現行列という概念を導入していなかったので，少々遠回しな言い方になっていたが，言葉を準備した後だと非常に明解に述べられていることがわかる．

また，定理 14.3 (2) に現れた A を $P^{-1}AP$ にするという変換はこの講義の前半の対角化のところで現れていた変換であることに注目しよう．定理の見方で言うと，この変換は基底を取り替えたときの表現行列の変換である．つまり，行列 A の対角化は『**線形変換** f **のある基底** B **に関する表現行列が** A **で与えられたとき，そこから表現行列が対角行列になるような新たな基底を探す (**P **を探す) 作業**』ということができる．線形変換の表現行列が対角行列になるという状況について少し言葉を準備して述べておこう．

定義 14.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．$\mathbf{0}$ でない元 $\boldsymbol{v} \in V$ が，ある $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

を満たすとき，λ を f の**固有値**，$\boldsymbol{v}$ を f の**固有値 λ の固有ベクトル**という．さらに，f の固有値 λ に対して，

$$V(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

とし，これを f の**固有値 λ の固有空間**という．

注意 2. 定義 14.4 で A を n 次正方行列とし $f = f_A$ とすると，f の固有値，固有ベクトル，固有空間は A の固有値，固有ベクトル，固有空間に一致する (定義 2.1).

注意 3. 条件式を変形することで，f の固有空間 $V(\lambda)$ は

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\lambda \mathrm{id}_V - f)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_V - f)$$

と書くことができる ($\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は V 上の恒等写像である)．ここで，V を n 次元，B を V の基底とし，f の B に関する表現行列を A とすると，表現行列の定義より，$\lambda \mathrm{id}_V - f$ の B に関する表現行列は $\lambda I_n - A$ であることが確かめられる (チェックせよ)．これより，$\psi_B\colon \mathbb{K}^n \to V$ を命題 14.1 と同様に定義すると，命題 14.1 (1) より，

$$V(\lambda) = \psi_B(\mathrm{Ker}\, f_{\lambda I_n - A}) = \psi_B(\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\})$$

となることがわかる．よって，f の固有値 λ の固有ベクトルは，f の表現行列の固有値 λ の固有ベクトルを ψ_B で送って得られるものであることがわかる．特に，一般の線形変換の固有ベクトルも基底が具体的に取れれば表現行列を用いた計算で求められることがわかる．

例 5. 第 13 回講義資料例 7 を思い出そう．ここで考えていた

$$F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (1 + x + x^2)f''(x) + 2xf'(x) + f(1).$$

は線形変換である．ここで，$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底 $B = \{1, x, x^2\}$ に関する F の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となるのであった．さらに，A の固有値 λ の固有空間を $V_A(\lambda)$ と書くことにすると，第 13 回講義資料例 7 での計算より，

$$V_A(1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(6) = \left\{ t \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{K} \right\}$$

となるのであった．これより，F の固有値 λ の固有空間を $V_F(\lambda)$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned} V_F(1) &= \psi_B(V_A(1)) = \{t \mid t \in \mathbb{K}\}, \\ V_F(2) &= \psi_B(V_A(2)) = \{t(1 + x) \mid t \in \mathbb{K}\}, \\ V_F(6) &= \psi_B(V_A(1)) = \{t(7 + 5x + 10x^2) \mid t \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

となる．実際これらが F の固有ベクトルになっていることを確かめてもらいたい．例えば，

$$F(7 + 5x + 10x^2) = 42 + 30x + 60x^2 = 6(7 + 5x + 10x^2)$$

である．

以下の定理は表現行列の定義から直ちにわかる．

定理 14.5

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．$f\colon V \to V$ を線形変換とし，f の B に関する表現行列を A としたとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

(2) 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{v}_j$ は固有値 λ_j の f の固有ベクトル．

定理 14.3 (2) と定理 14.5 より，以下の定理も直ちに従う．これは，定理 5.3 の一般の線形空間への一般化である．

定理 14.6

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) ある V の基底 B が存在して，B に関する f の表現行列が対角行列になる．

(2) V は f の固有ベクトルからなる基底 B を持つ．

与えられた線形変換がどのような固有ベクトル，固有値を持っているかということは様々な分野において非常に重要な問題となる．例えば量子力学的な問題意識については，長谷川浩司著『線型代数［改訂版］』の 19 章などを参考にすること (固有値は “エネルギー”，固有ベクトルは “定常状態” に対応する)．

定理 14.3 (2) より，線形変換の表現行列は基底を取り替えると A が $P^{-1}AP$ に取り替わるといった形で変わるのであった．逆に考えれば，『A が $P^{-1}AP$ に取り替えても変わらない値』は『線形変換 f そのものに備わっている値』というようにとらえることができる．ここで，行列式，固有多項式，トレースは次の性質を持っていたことを思い出そう (線形代数 I の内容，定理 4.1，第 5 回講義資料 p.4 注意 1 参照)：

A を n 次正方行列，P を n 次正則行列としたとき，以下が成立する：

- $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$.
- $\Phi_A(t) = \Phi_{P^{-1}AP}(t)$．ここで $\Phi_X(t)$ は X の固有多項式を表す (定義 3.2)．
- $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

これより，これらの値は線形変換 f に対して定めることができる：

定義 14.7

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，

(1) $\det(f) \coloneqq \det(A)$,

(2) $\Phi_f(t) \coloneqq \Phi_A(t)$,

(3) $\mathrm{Tr}(f) \coloneqq \mathrm{Tr}(A)$,

とし，(1) を f **の行列式**，(2) を f **の固有多項式**，(1) を f **のトレース**という．ここで，A は V のある基底 B に関する f の表現行列である．上に述べたように A は基底 B の取り方によって変わり得るが，$\det(A), \Phi_A(t), \mathrm{Tr}(A)$ の値は，基底の取り方 B に依らずに定まっていることに注意する．

例 6. 例 5 の F に対して，

$$\det(F) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = 12$$
$$\Phi_F(t) = \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -3 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}\right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$
$$\mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 9$$

である．

命題 14.1 (3) より，以下は直ちにわかる．

定理 14.8

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，以下の同値関係が成立する．

$$f \text{ は線形同型写像である} \quad \Leftrightarrow \quad \det(f) \neq 0.$$

次に固有空間の次元に関する定理を証明する．第 4 回講義資料の n 次正方行列 A の対角化可能性判定のアルゴリズムについて説明したところ (p.7, p.8) で，「A の固有値 λ であって，$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という連立一次方程式の解の自由度 ℓ が，A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解 $t = \lambda$ の重複度 m と異なるものが存在するとき対角化不可能である」ということを述べたが，実はここの厳密な証明をしていなかった．定理 10.10 より，

$$\begin{aligned} \ell &= \dim_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid (\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \\ &= \dim_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\} \\ &= \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda),\ \text{ただし，} V(\lambda) \text{ は } A \text{ の固有値} \lambda \text{の固有空間} \end{aligned}$$

となるが，実は常に $\ell \leq m$ が成立する．これを述べるのが以下の定理である．これより，$\ell \neq m$ のときは，$\ell < m$ となるから，必要な数の一次独立な固有ベクトルを $V(\lambda)$ から選んでくることができないので対角化不可能であるというのが証明となる．ここまでの準備のもとに，今はこの定理の証明が簡単にできるので，ここで証明しておこう．

定理 14.9

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．f の固有方程式 $\Phi_f(t) = 0$ が $t = \lambda$ という解を重複度 $m (m \geq 1)$ で持つとき，f の固有値 λ の固有空間を $V(\lambda)$ とすると，

$$1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \leq m$$

である．

証明． B を V の基底とし，f の B に関する表現行列を A とする．このとき，仮定より，$\Phi_A(t) = \Phi_f(t) = 0$ は $t = \lambda$ という解を持つので，A は固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を少なくとも 1 つは持つ (第 3 回講義資料 3.3 節冒頭の議論参照)．このとき，注意 3 より，f も固有値 λ の固有ベクトルを持つ．よって，$1 \leq \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)$ である．

次に，$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) \leq m$ であることを示す．$\ell = \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda)$ とすると，次元の定義より，$V(\lambda)$ から ℓ 個の一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell\}$ を選ぶことができる．$\dim_{\mathbb{K}} V = n$ とすると，定理 10.9 より，ここに V の $n - \ell$ 個の元を加えて $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell, \boldsymbol{v}_{\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．ここで，$j = 1, \ldots, \ell$ に関しては，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda \boldsymbol{v}_j$$

が成り立つことに注意すると，f の B に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_\ell & X \\ O & Y \end{pmatrix}$$

という形をしていることがわかる ($*$ には適当な数が入るという意味．X は $\ell \times (n-\ell)$ 行列，Y は $(n-\ell)$ 次正方行列，O は零行列)．これより，行列式の計算から

$$\Phi_f(t) = \Phi_A(t) = \det(tI_n - A) = (t-\lambda)^\ell \det(tI_{n-\ell} - Y)$$

となることがわかる．特に，$\det(tI_{n-\ell} - Y)$ も t に関する多項式であることに注意すると，f の固有多項式 $\Phi_f(t)$ は $(t-\lambda)^\ell$ で割り切れることがわかる．よって，固有方程式 $\Phi_f(t) = 0$ の解 $t = \lambda$ の重複度 m は ℓ 以上であることがわかる．よって，$\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda) = \ell \leq m$. □

コラム：部分空間の直和について (やや発展．興味のある方向け)

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_n$ を V の部分空間とする．このとき，

$$\begin{aligned} W_1 + \cdots + W_n &:= \{\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n \mid \boldsymbol{w}_j \in W_j, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup \cdots \cup W_n) \end{aligned}$$

とおくと，これは再び V の部分空間となる．これを $W_1, \ldots, W_n$ **の和**という．これは $W_1 + \cdots + W_n$ の和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ ではなく，和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ の生成する部分空間であることに注意すること (部分空間の和集合は一般に部分空間にはならないのであった．第 9 回講義資料 p.9 注意 3 参照)．ここで，$W_1, \ldots, W_n$ が

$$「\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n \text{ かつ } \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}」\text{ ならば } \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}$$

を満たすとき，$W_1 + \cdots + W_n$ は**直和**であるといい，$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ と書く．この条件は『$W_1, \ldots, W_n$ のいくつかから $\mathbf{0}$ でない元を選んでくると自動的に一次独立になる』というように読める．

例 7. $\mathbb{R}^2$ において，

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},\ W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},\ W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},$$

とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in W_2 \text{ かつ } \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ならば，$s = t = 0$ となり，$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ となるので，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ である．さらに，

$$W_1 \oplus W_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup W_2) = \mathbb{R}^2$$

である．

一般に，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間として，W_1, W_2 をその部分空間としたとき，$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ ならば，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ となる．なぜなら，$\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ で $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$ となるとき，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ なので，W_1 は部分空間であることから，

$$\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_1 \in W_1.$$

よって，$\boldsymbol{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ なので，$\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$ であり，このとき，$\boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$ も成立するからである．

この事実を使うと，$W_2 \oplus W_3, W_3 \oplus W_1$ もすぐにわかる．一方，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和ではない．なぜなら，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in W_1,\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in W_2,\ \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \in W_3$$

とすると，それぞれは $\mathbf{0}$ ではないが，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立するためである．

直和に関しては以下の命題が成立する．

命題 14.10

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_n$ を V の有限次元部分空間とする．このとき，以下の (1), (2)，(3) は同値である．

(1) $W_1 + \cdots + W_n$ は直和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ である．

(2) 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$B_j \subset W_j$ を W_j の基底とすると，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ の基底である．

(3) $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + \cdots + W_n) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} W_n$.

証明． (1)⇒(2) 各 B_j が W_j を生成することより，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ を生成する．よって，B が一次独立であることを示せばよい．ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w}_i^{(j)} \in B_j (i = 1, \ldots, k_j, j = 1, \ldots, n)$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)} \\
&+ c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)} \\
&+ \cdots \\
&+ c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となったと仮定する (ただし $\boldsymbol{w}_i^{(j)}$ らは互いに異なるとする)．このとき，各行の和

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

は W_j の元であることから，直和の定義より，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)} = \mathbf{0}.$$

ここで，B_j は W_j の基底であったことから，一次独立なので，上式より全ての $i = 1, \ldots, k_j$ に対して，$c_i^{(j)} = 0$．これより，B の一次独立性が示された．

(2)⇒(1) $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ かつ $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}$ であると仮定する．このとき，全ての $j = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j = \mathbf{0}$ であることを示せばよい．B_j は W_j の基底なので，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w}_i^{(j)} \in B_j (i = 1, \ldots, k_j)$ が存在して，

$$\boldsymbol{w}_j = c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

と書ける (ただし，$\boldsymbol{w}_i^{(j)}$ らは互いに異なるとする)．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n =& c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)} \\
&+ c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)} \\
&+ \cdots \\
&+ c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)}
\end{aligned}$$

となるが，いま B は $W_1+\cdots+W_n$ の基底であることから一次独立なので，すべての $i=1,\ldots,k_j, j=1,\ldots,n$ に対し，$c_i^{(j)}=0$．よって，このとき全ての $j=1,\ldots,n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$ であることがわかる．

(2)⇒(3) 次元の定義が基底の元の個数であったことより明らかである．

(3)⇒(2) 各 B_j が W_j を生成することより，$B=B_1\cup\cdots\cup B_n$ は $W_1+\cdots+W_n$ を生成する．ここで，B の元の個数は $\dim_{\mathbb{K}} W_1+\cdots+\dim_{\mathbb{K}} W_n$ であり，仮定よりこれは $W_1+\cdots+W_n$ の次元に等しいので，定理 10.9 (1) より，これは $W_1+\cdots+W_n$ の基底となる． □

注意 4．命題 14.10 の (1) と (2) の同値性の証明は W_j らの中に無限次元のものがある場合にも通用することがわかる．よって，(1) と (2) の同値性は W_j らの中に無限次元のものがあっても成り立つ．

さて，ここで固有ベクトルの一次独立性に関する以下の定理を思い出そう．

定理 4.5 (再掲)

$\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k\in\mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が互いに異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

これは，ここで学んだ直和という概念を用いると，以下のように述べることができる (正方行列の固有ベクトルのに関する主張だが，注意 3 より，これは線形変換の固有ベクトルに関する主張に直ちに一般化できることに注意．)．

定理 14.11

$\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ を線形変換 $f\colon V\to V$ の互いに異なる固有値とし，f の固有値 λ_j の固有空間を $V(\lambda_j)$ と書くことにする．このとき，$V(\lambda_1)+\cdots+V(\lambda_k)$ は直和 $V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ である．

命題 14.10 の (1) と (2) の同値性と定理 14.11 を用いると，定理 14.6 は以下のように言い換えられることがわかる．

定理 14.12

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) ある V の基底 B が存在して，B に関する f の表現行列が対角行列になる．
(2) ある f の固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ が存在して，$V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ となる．

14.3　補足：計量ベクトル空間

本講義の後半では主に，線形代数 I，線形代数 II の前半で勉強してきた $\mathbb{K}^n$，行列に関する内容を一般のベクトル空間 V，線形写像・変換に一般化するということを行ってきた．そこで，本講義の最後の補足として，$\mathbb{K}^n$ における内積をベクトル空間に一般化する話について簡単に述べておこう．なお，この節の内容は講義時間内ではおそらく扱うことができないと思われるが，ここに述べる範囲については $\mathbb{K}^n$ での話をそのままベクトル空間での話に焼き直すだけとなっている．ただ，ベクトル空間の言葉で記述しておくということは応用を考える上で非常に大事なことである．

内積は一般のベクトル空間においては (座標が使えないので) その性質を用いて特徴づけることになる．以下の定義にある性質 (1)–(4) は命題 5.6 で示した性質 (1)–(4) にそれぞれ対応している．

定義 14.13

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V に写像

$$V \times V \to \mathbb{K},\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$$

であって，以下の性質 (1)–(4) を満たすものが定まっているとき，V を**計量ベクトル空間**といい，上の写像を V の**内積**と呼ぶ：

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = \overline{\boldsymbol{w} \bullet \boldsymbol{v}}$,

(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}$,

(3) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$c \in \mathbb{K}$ に対し，$(c\boldsymbol{v}) \bullet \boldsymbol{w} = \overline{c}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{v} \bullet (c\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w})$,

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} \geq 0$，さらに，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である $(a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{x} = x$ なので，上の複素共役は全て無視する．

例 8. 以下に計量ベクトル空間の例を挙げる：

(1) $\mathbb{R}^n$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

によって，$\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間となる．

(2) $\mathbb{C}^n$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．この内積はエルミート内積と呼ぶのであった (定義 5.5).

(3) 複素係数 1 変数多項式のなすベクトル空間空間 $\mathbb{C}[x]$ は

$$f(x) \bullet g(x) := \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．この内積は **L^2-内積**と呼ばれる (内積の定義を満たすことはチェックせよ).

(4) $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V の部分空間は V と同じ内積を用いることで再び $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間となる．例えば，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ は上の $\mathbb{C}[x]$ と全く同じ定義の内積を用いることで $\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．

以下の定義は定義 5.7 の定義をそのまま計量ベクトル空間に移したものである．

定義 14.14

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする.

- $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v}}$ を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．内積の性質 (4) より，これは 0 以上の実数である.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{w} = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という.
- $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \dots\}$ を V の基底とする．ここで，

$$\boldsymbol{u}_i \bullet \boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

  が成立するとき，B を V の**正規直交基底**という．つまり，正規直交基底とは，各元の大きさが全て 1 で互いに直交するベクトルからなる V の基底のことである.

$\mathbb{K}^n$ においては，(正規直交基底とは限らない) 基底から，正規直交基底を作る “グラム・シュミットの直交化法” と呼ばれるアルゴリズムがあった (6.2 節参照)．ここで，グラムシュミットの直交化法で正規直交基底が得られる原理を思い出すと，これは実は内積の定義にある性質 (1)–(4) さえ満たされていれば同様に行うことができるということがわかる (補足プリント :『グラム・シュミットの直交化法について』参照)．ここにその方法を再掲しておこう.

グラム・シュミットの直交化法 (Gram-Schmidt orthonormalization)

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．このとき，以下の方法で V の正規直交基底を得ることができる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &:= \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}'_2 &:= \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1, \\
\boldsymbol{u}'_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2 \bullet \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_2 \bullet \boldsymbol{u}'_2)}\boldsymbol{u}'_2, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_k &:= \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{u}'_i \bullet \boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{u}'_i \bullet \boldsymbol{u}'_i)}\boldsymbol{u}'_i, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &:= \boldsymbol{v}_n - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_1 \bullet \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \bullet \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_{n-1} \bullet \boldsymbol{u}'_{n-1})}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k := \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_k||}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底.

特に，以下が言える.

定理 14.15

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とする．このとき，V は正規直交基底を持つ.

例 9. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ に L^2-内積を考え，これを計量ベクトル空間とみなす (例 8 (4) 参照)．$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底として標準的な $B = \{1, x, x^2\}$ をとり，これにグラム・シュミットの直交

法を適用することで正規直交基底を得てみよう．まず，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' &\coloneqq 1 \\
\boldsymbol{u}_2' &\coloneqq x - \frac{(1 \bullet x)}{(1 \bullet 1)} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = x - \frac{0}{2} = x \\
\boldsymbol{u}_3' &\coloneqq x^2 - \frac{(1 \bullet x^2)}{(1 \bullet 1)} \cdot 1 - \frac{(x \bullet x^2)}{(x \bullet x)} x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x = x^2 - \frac{2/3}{2} - \frac{0}{2/3} x = \frac{1}{3}(3x^2 - 1).
\end{aligned}
$$

する．そして，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|} \boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|} \boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx}} \cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}} x \\
\boldsymbol{u}_3 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|} \boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)^2 / 9 dx}} \cdot \frac{1}{3}(3x^2 - 1) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)
\end{aligned}
$$

で与えられる．これらは定数倍の差を除いて**ルジャンドル多項式**と呼ばれる多項式になっており，重要な多項式の 1 例を与えている．(より高次のものは $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ に上のグラム・シュミットの直交化法をどんどん適用することで得られる．) 興味を持った方は是非ルジャンドル多項式について調べてみて欲しい．

ファンデルモンド行列式について

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本資料ではファンデルモンド行列式の公式について証明を与える．この公式は第 4 回講義資料の定理 4.5 の証明で用いられている．

ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant)

任意の正の整数 n に対し，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

注意．この公式の右辺の $\prod_{1\leq i<j\leq n}$ という記号は，『条件 $1 \leq i < j \leq n$ を満たすような全ての自然数 i と j に関して積をとる』という意味である．和に関する $\sum$ という記号の積バージョンであると考えれば良い[*1]．例えば，$n = 3$ のとき，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

となる．ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant) の右辺の積は**差積**とも呼ばれる．特に，この行列式の値が 0 でないことの必要十分条件が

任意の相異なる i, j について $x_i \neq x_j$

であることに注意する．

証明． 証明すべき式の左辺は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての多項式であるが，任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$x_i = x_j$ とすると，考えている行列内に同じ行が 2 つ現れることになるので，行列式の性質 (交代性) からこのとき恒等的に 0 となる．よって因数定理より，この多項式は $(x_j - x_i)$ で割り切れるということがわかる．これより，ある多項式 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を用いて，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

と書けることがわかる．

---

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 $\sum$ は総和を意味する sum, summation の頭文字 s に由来しており，$\prod$ は積を意味する product の頭文字 p に由来している．$\prod$ はパイ π の大文字である．

一方，行列式を考えている行列の (i,j) 成分が x_i^{j-1} であることに注意すると，行列式の一般的な明示式より，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^0 x_{\sigma(2)}^1 x_{\sigma(3)}^2 \cdots x_{\sigma(n)}^{n-1}$$

となる．ただし，S_n は n 文字の置換全体の集合，$\operatorname{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である．これより，この多項式は全ての項が $0+1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ 次である多項式であり，σ が恒等置換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ である項を考えると，$x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる ($\operatorname{sgn}(e) = 1$ に注意).

いま，$1 \leq i < j \leq n$ を満たす (i,j) は全部で ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 通りあるので，$\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$ は全ての項が $n(n-1)/2$ 次である多項式であり，さらに $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる．これらの比較により，上の多項式 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は 1 となるしかないことがわかる．よって，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□

グラム・シュミットの直交化法について

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．グラム・シュミットの直交化法がうまく働くことの厳密な証明を与える．グラム・シュミットの直交化法を再掲しておこう．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram–Schmidt orthonormalization)

$B=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，以下の方法で B から $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底を得ることができる：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &:= \boldsymbol{v}_1,\\
\boldsymbol{u}'_2 &:= \boldsymbol{v}_2-\frac{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1,\\
\boldsymbol{u}'_3 &:= \boldsymbol{v}_3-\frac{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1-\frac{(\boldsymbol{u}'_2\cdot\boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_2\cdot\boldsymbol{u}'_2)}\boldsymbol{u}'_2,\\
&\ \ \vdots\\
\boldsymbol{u}'_k &:= \boldsymbol{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{u}'_i\cdot\boldsymbol{v}_k)}{(\boldsymbol{u}'_i\cdot\boldsymbol{u}'_i)}\boldsymbol{u}'_i,\\
&\ \ \vdots\\
\boldsymbol{u}'_n &:= \boldsymbol{v}_n-\frac{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_1\cdot\boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1}\cdot\boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}'_{n-1}\cdot\boldsymbol{u}'_{n-1})}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}
$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k := \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_k||}\boldsymbol{u}'_k,\quad k=1,\dots,n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\dots,\boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底.

グラム・シュミットの直交化法で正規直交基底が得られることの証明.

<u>$\{\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{u}'_2,\dots,\boldsymbol{u}'_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であること，特に各 $\boldsymbol{u}'_k$ は $\mathbf{0}$ にはならないこと：</u>

各 $k=1,\dots,n$ に対し，$\{\boldsymbol{u}'_1,\dots,\boldsymbol{u}'_k,\boldsymbol{v}_{k+1},\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であることを k に関する帰納法で示す．($k=n$ の時が欲しい主張であることに注意．)

$k=1$ のとき，定義より $\{\boldsymbol{u}'_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ なので主張は正しい.

次に, $k\geq 1$ で $\{\boldsymbol{u}'_1,\dots,\boldsymbol{u}'_k,\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{v}_{k+2},\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であることを仮定して, $\{\boldsymbol{u}'_1,\dots,\boldsymbol{u}'_k,\boldsymbol{u}'_{k+1},\boldsymbol{v}_{k+2},\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であることを示す.

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

$\boldsymbol{u}'_{k+1}$ の定義より，これらの関係は行列の積を用いて，

$$(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_k\ \boldsymbol{u}'_{k+1}\ \boldsymbol{v}_{k+2} \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_k\ \boldsymbol{v}_{k+1}\ \boldsymbol{v}_{k+2} \cdots \boldsymbol{v}_n) \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccc} & & \overset{k}{\vee} & \overset{k+1}{\vee} & \overset{k+2}{\vee} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\frac{(\boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{u}'_k)} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ < k \\ < k+1 \\ < k+2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

となる．ここで, 帰納法の仮定より $\boldsymbol{u}'_1 \neq \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{u}'_k \neq \boldsymbol{0}$ なので, 内積の定義 (iv) から, $\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1 \neq 0, \ldots, \boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{u}'_k \neq 0$ であることに注意する (これより，右辺の正方行列の非対角成分に現れる分母は 0 でなく，グラム・シュミットの直交化法は確かに実行可能である)．右辺に現れた正方行列は対角成分が全て 1 の上三角行列なので，その行列式の値は 1 で，正則行列である．従って，$\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であるとき，すなわち $(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_k\ \boldsymbol{v}_{k+1}\ \boldsymbol{v}_{k+2} \cdots \boldsymbol{v}_n)$ が正則であるとき，$(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_k\ \boldsymbol{u}'_{k+1}\ \boldsymbol{v}_{k+2} \cdots \boldsymbol{v}_n)$ も正則となり，$\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k, \boldsymbol{u}'_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2} \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底となる．

$\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\}$ の元が互いに直交すること：

内積の性質 (命題 5.6 (1)) より，$\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j = 0$ のとき $\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{u}'_i = 0$ でもあるので，

$$\text{任意の } 1 \leq i < j \leq n \text{ に対し，} \boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j = 0 \tag{$*$}$$

であることを示せばよい．j に関する帰納法で示す．$j = 2$ のとき，内積の性質 (命題 5.6 (2),(3)) より，

$$\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{u}'_1 \cdot \left(\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)} \boldsymbol{u}'_1 \right) = \boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)} (\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1) = 0$$

より，$(*)$ は成立する．

次に，$j = 2, \ldots, k$ で $(*)$ が成立することを仮定して，$j = k + 1$ でも $(*)$ が成立することを示す．つまり，$i = 1, \ldots, k$ に対し，$\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_{k+1} = 0$ であることを示す．内積の性質 (命題 5.6 (2),(3)) より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_{k+1} &= \boldsymbol{u}'_i \cdot \left(\boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{u}'_j)} \boldsymbol{u}'_j \right) \\ &= \boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{u}'_j)} (\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j). \end{aligned}$$

ここで，帰納法の仮定より，$i > j$ のとき，$\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j = \overline{\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{u}'_i} = 0$($i \leq k$ なので)，$i < j \leq k$ のときも，$\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j = 0$ である．よって，

$$\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_{k+1} = \boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_j \cdot \boldsymbol{u}'_j)} (\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j) = \boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{v}_{k+1} - \frac{(\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{v}_{k+1})}{(\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_i)} (\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_i) = 0.$$

以上より，示すべきことは示された．

$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が V の正規直交基底であること：

既に $\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\}$ が互いに直交する元からなる $\mathbb{K}^n$ の基底であることを示したが，各 $\boldsymbol{u}_k$ は $\boldsymbol{u}'_k$ を単に (0 でない) スカラー倍したものなので，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ も $\mathbb{K}^n$ の基底である．さらに，内積の性質 (命題 5.6 (3)) より，

$$\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k = \left(\frac{1}{||\boldsymbol{u}'_k||} \right)^2 (\boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{u}'_k) = \frac{\boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{u}'_k}{\boldsymbol{u}'_k \cdot \boldsymbol{u}'_k} = 1.$$

また，$i \neq j$ のとき，

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_i||} \frac{1}{||\boldsymbol{u}'_j||} (\boldsymbol{u}'_i \cdot \boldsymbol{u}'_j) = 0.$$

以上より，確かに $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底である． □

補足：岩澤分解 (興味がある人向け)

上の『$\{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \dots, \boldsymbol{u}'_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であること，特に各 $\boldsymbol{u}'_k$ は $\boldsymbol{0}$ にはならないこと』の証明中に行った議論から，各 $k = 2, \dots, n$ に対して対角成分が全て 1 のある上三角行列 N_k が存在して，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_n) &= (\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_{n-2}\ \boldsymbol{u}'_{n-1}\ \boldsymbol{v}_n)N_n \\ &= (\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_{n-2}\ \boldsymbol{v}_{n-1}\ \boldsymbol{v}_n)N_{n-1}N_n \\ &\cdots \\ &= (\boldsymbol{u}'_1\ \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_{n-1}\ \boldsymbol{v}_n)N_2 \cdots N_{n-1}N_n = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)N_2 \cdots N_{n-1}N_n\end{aligned}$$

となることがわかる．ここで，対角成分が全て 1 の上三角行列の積は再び対角成分が全て 1 の上三角行列となることから，$N' := N_2 \cdots N_n$ とすると，N' は対角成分が全て 1 の上三角行列で，

$$(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n)N'$$

と書けることがわかる．さらに，$N := (N')^{-1}$ とすると，N も対角成分が全て 1 の上三角行列で，

$$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_n)N$$

である．次に，

$$A := \begin{pmatrix} ||\boldsymbol{u}'_1|| & & & \\ & ||\boldsymbol{u}'_2|| & & \\ & & \ddots & \\ & & & ||\boldsymbol{u}'_n|| \end{pmatrix}$$

とすると，

$$(\boldsymbol{u}'_1 \cdots \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)A$$

である．以上より，

$$(\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n)AN$$

となる．ここで，$\mathbb{K}^n$ の n 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ に関して，

- $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ を並べてできる n 次正方行列 $(\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n)$ が正則．
- $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底
  $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ を並べてできる n 次正方行列 $(\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_n)$ が $\begin{cases} \text{実直交行列 } (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のとき}) \\ \text{ユニタリ行列 } (\mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ のとき}). \end{cases}$

という対応を思い出すと，上の考察から以下の定理が言える：

定理 (岩澤分解)

任意の実正則行列 $X_\mathbb{R}$ に対し，ある実直交行列 $U_\mathbb{R}$，正の対角成分を持つ対角行列 A，対角成分が全て 1 の実上三角行列 $N_\mathbb{R}$ が存在して，

$$X_\mathbb{R} = U_\mathbb{R} A N_\mathbb{R}$$

となる．
また，任意の複素正則行列 $X_\mathbb{C}$ に対し，あるユニタリ行列 U，正の対角成分を持つ対角行列 A'，対角成分が全て 1 の複素上三角行列 $N_\mathbb{C}$ が存在して，

$$X_\mathbb{C} = UA'N_\mathbb{C}$$

となる．

ベクトル空間の基底に関する定理について

大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

本資料では第 10 回講義資料で証明を省略した定理 10.8 と定理 10.9 について証明を与える．以下に基底の定義と定理 10.8，定理 10.9 を再掲しておこう．

定義 10.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が次の性質 (b1)，(b2) を満たすとき，B を V の**基底** (basis) という．

(b1) B は一次独立である．

(b2) B は V を生成する．つまり．$\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である．

定理 10.8

n を正の整数とする．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

このとき，V のある基底が n 個の元からなるとすると，V の任意の基底の元の個数は n 個である．

定理 10.9

V を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，その次元を n とする．このとき，以下が成立する：

(1) V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を満たすとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，一次独立性 (基底の定義条件 (b1)) は自動的に満たされる．

(2) $k \leq n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を一次独立な V の元の組とする．このとき，適切に V の $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が存在して，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．
特に，V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，生成性 (基底の定義条件 (b2)) が自動的に満たされる．

定理 10.8 の証明. n 個の元からなる V の基底を $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．さらに V の基底を任意にとり，B' とする．(この時点では B' の元の個数は n 個とは限らず，無限個の可能性もあることに注意する．) そこで，B' の元の個数が n 個であることを示せばよい．

基底の定義条件 (b2) より，ある $p_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ と相異なる $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m \in B'$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \boldsymbol{b}'_i, \quad j = 1, \ldots, n \tag{$*$}$$

と書ける．基底の定義条件 (b2) より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合で書けるので，$(*)$ より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書ける．ここで，$\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$ は基底 B' の相異なる元であることから，一次独立であることにも注意すると，$\{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m\}$ は基底の定義条件 (b1)，(b2) を満たすので，V の基底となる．さらに，B' に $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$ 以外の元が存在するとすると，その元は $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書けることから，B' が一次独立な集合であることに反する．よって，$B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m\}$ であり，特に B' は有限集合である．

* *e-mail*： hoya@shibaura-it.ac.jp

ここで，再び基底の定義条件 (b2) より，ある $q_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \boldsymbol{b}_i, \quad j = 1, \ldots, m \tag{$**$}$$

と書ける．行列の記法を用いると，$(*)$，$(**)$ は以下のようにまとめられる：

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \qquad Q \coloneqq \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{m2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

として，

$$(\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)P = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n),$$

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)Q = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{m2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m).$$

これより，

$$(\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)PQ = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m), \quad (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)QP = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n).$$

となる．いま，$PQ = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ とすると，成分ごとに見て上の左の式は，

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{b}'_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

を意味するが，$\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$ らの一次独立性より，$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$ となり，$PQ = I_m$ であることがわかる．全く同様に，$QP = I_n$ である．

さて，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式 $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_m$，$Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_n$ を考える ($\boldsymbol{0}_m, \boldsymbol{0}_n$ はそれぞれ m 次，n 次零ベクトル)．すると，

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_m \Rightarrow \ QP\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{0}_m \ \Rightarrow \ I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_n, \\ Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_n \Rightarrow \ PQ\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{0}_n \ \Rightarrow \ I_m\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_m, \end{aligned}$$

となるので，これらの連立一次方程式の解の自由度は 0 で，解は一意に定まることがわかる．これより，$\mathrm{rank}(P) = n$，$\mathrm{rank}(Q) = m$ となる (ここでは，この証明の後にある定理※を用いた)，今，P が $m \times n$ 行列，Q が $n \times m$ 行列であることに注意すると，$n = \mathrm{rank}(P) \leq \min\{m, n\} (\leq n)$，$m = \mathrm{rank}(Q) \leq \min\{m, n\} (\leq m)$ なので，$n = \min\{m, n\} = m$.

m は基底 B' の元の個数であったことを思い出すと，示すべきことは示された． □

上の証明中では以下の定理を用いた．これは線形代数 I の範囲であるので，思い出しておいてほしい (第 1 回本レポート課題解答問題 7 補足解説参照).

定理※ (線形代数 I の範囲)

A を各成分が $\mathbb{K}$ の元の $m \times n$ 行列とする．このとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_m$$

の一般解に現れる必要最小限のパラメータの数 (=解の自由度) は $n - \operatorname{rank} A$ である．特に，この解が任意定数を含まない場合 $n = \operatorname{rank} A$ である．

定理 10.9 の証明．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であることを示せばよい，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次従属であるとすると，ある $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

となる．このとき，$c_k \neq 0$ となる k をとると，

$$\boldsymbol{v}_k = -\frac{1}{c_k}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} + c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)$$

となるので，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ も V をベクトル空間として生成する．

ここで，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が再び一次従属であるとすると，上と全く同じ議論を繰り返すことで，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ からさらに 1 つ元を取り除いてもそれらが V をベクトル空間として生成するようにできる．この操作を繰り返して，一次独立な集合になるまでベクトルを取り除いてゆき，その最終結果を $\{\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_\ell}\}$(元の個数は ℓ 個) とする．(元が 1 つだけになると必ず一次独立なので，この取り除く操作は必ずどこかで終了する．) 元を取り除いているので，$\ell < n$ であることに注意する．

このとき，上のアルゴリズムから $\{\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_\ell}\}$ は V をベクトル空間として生成し，かつ一次独立であるので V の基底である．しかし，定理 10.8 より元の個数が n より少ない基底は存在し得ないので，これは矛盾である．よって，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立である． □

(2) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるのであれば，定理 10.8 より，加えるベクトルの数は $(n-k)$ 個なので，示すべきことは $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるという事実である．

さて，V の基底を任意に 1 つとり，$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると，$V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ となるので，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} = V$．いま，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は一次独立でもあるので，このとき $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ は V の基底となり，特に V の元を加える必要はない $(k = n)$．

次に，$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \not\subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると，ある $1 \leq \ell \leq n$ が存在して，$\boldsymbol{b}_\ell \notin \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ となる．このとき，$\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は一次独立となることを証明する．ある $c, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{b}_\ell + c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

となったとすると，$c \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{b}_\ell = -\frac{1}{c}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k)$ となるので，$\boldsymbol{b}_\ell \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ となって矛盾．よって，$c = 0$ であるが，このとき $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ の一次独立性より，$c = c_1 = \cdots = c_k = 0$ である．よって，$\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は一次独立となる．

$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ のとき，上と全く同じ議論により，$\{\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ は V の基底となる．もし，$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \not\subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ のときも，やはり上の議論を繰り返して，$\boldsymbol{b}_{\ell'} \notin \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ なる $\boldsymbol{b}_{\ell'}$ を $\{\boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ に添加し，より大きな一次独立集合を作る．この操作を次々に繰り返すと $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ に $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ の元をいくつか $(\boldsymbol{b}_{\ell_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{\ell_s}$ とする$)$ 付け加えたところで $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_{\ell_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{\ell_s}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ となる．このとき上のアルゴリズムから，$\{\boldsymbol{b}_{\ell_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{\ell_s}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ は一次独立で，しかも V をベクトル空間として生成するので，V の基底となる (定理 10.8 より $s = n - k$)．よって示すべきことは示された． □