ファンデルモンド行列式について

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本資料ではファンデルモンド行列式の公式について証明を与える．この公式は第 5 回講義資料の定理 5.6 の証明で用いられている．

ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant)

任意の正の整数 n に対し，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

注意．この公式の右辺の $\prod_{1\leq i<j\leq n}$ という記号は，『条件 $1 \leq i < j \leq n$ を満たすような全ての自然数 i と j に関して積をとる』という意味である．和に関する $\sum$ という記号の積バージョンであると考えれば良い[*1]．例えば，$n = 3$ のとき，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

となる．ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant) の右辺の積は**差積**とも呼ばれる．特に，この行列式の値が 0 でないことの必要十分条件が

任意の相異なる i, j について $x_i \neq x_j$

であることに注意する．

証明． 証明すべき式の左辺は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての多項式であるが，任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$x_i = x_j$ とすると，考えている行列内に同じ行が 2 つ現れることになるので，行列式の性質 (交代性) からこのとき恒等的に 0 となる．よって因数定理より，この多項式は $(x_j - x_i)$ で割り切れるということがわかる．これより，ある多項式 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を用いて，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

と書けることがわかる．

* *e-mail*: `hoya@shibaura-it.ac.jp`

[*1] $\sum$ は総和を意味する sum, summation の頭文字 s に由来しており，$\prod$ は積を意味する product の頭文字 p に由来している．$\prod$ はパイ π の大文字である．

一方，行列式を考えている行列の (i,j) 成分が x_i^{j-1} であることに注意すると，行列式の一般的な明示式より，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^0 x_{\sigma(2)}^1 x_{\sigma(3)}^2 \cdots x_{\sigma(n)}^{n-1}$$

となる．ただし，S_n は n 文字の置換全体の集合，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である．これより，この多項式は全ての項が $0+1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ 次である多項式であり，σ が恒等置換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ である項を考えると，$x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる ($\mathrm{sgn}(e) = 1$ に注意).

いま，$1 \leq i < j \leq n$ を満たす (i,j) は全部で ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 通りあるので，$\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$ は全ての項が $n(n-1)/2$ 次である多項式であり，さらに $x_2 x_3^2 \cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる．これらの比較により，上の多項式 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は 1 となるしかないことがわかる．よって，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□