線形代数 II 第 1 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列式の値$\boxed{ア}$〜$\boxed{ウ}$を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

$$(1)\quad \left|\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right| = \boxed{ア}$$

$$(2)\quad \left|\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \boxed{イ}$$

$$(3)\quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}\right| = \boxed{ウ}$$

問題 1 解答例．

(1) -5

(2) -8

(3) 60 □

問題 1 補足解説． まず行列式の定義を思い出しておこう[*1]．

行列式の明示式による定義

n を正の整数とする．$n \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

に対して，A の行列式 $|A|$ (あるいは $\det(A)$ と書かれる) は以下で定義される．

$$|A| \coloneqq \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで，S_n は n 文字の置換全体の集合で $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$．ただし，$k$ は σ に対応するあみだくじを書いたときの横棒の本数の数 (σ に対応するあみだくじは無数にあるが，横棒の本数の偶奇は対応するあみだくじの取り方にはよらない)．

行列式を計算する際には行列式の余因子展開が便利であった．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 行列式には同値な定義が複数あるので人によってはこれを「行列式の性質」として学んだ人もいるかもしれないが，ここではこれを定義とすることにする．

余因子展開

$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対して，以下が成立する．
任意の $j=1,\dots,n$ に対し，

$$\begin{aligned}|A| &= a_{j1}\widetilde{a_{j1}}+a_{j2}\widetilde{a_{j2}}+\cdots+a_{jn}\widetilde{a_{jn}} \quad (\text{第 } j \text{ 行に関する余因子展開})\\ &= a_{1j}\widetilde{a_{1j}}+a_{2j}\widetilde{a_{2j}}+\cdots+a_{nj}\widetilde{a_{nj}} \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開})\end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{a_{ij}}:=(-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$，ただし，$\check{A}_{ij}$ は A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列である．$\widetilde{a_{ij}}$ を (i,j)-**余因子**と呼ぶ．

また，以下の行列式の性質も計算においては便利であった．なお，これらは問題 4 の補足解説に述べる行列式の重要 3 性質から導かれる (証明を考えてみよ)．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では列ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{b}$ が n 次元列ベクトル)．

(i) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$. つまり，0 のみの列があれば行列式は 0.

(ii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{b}}},\dots,\overset{j'}{\check{\boldsymbol{b}}},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$．ただし，$j\neq j'$．つまり，同じ列があれば行列式は 0.

(iii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}}_j,\dots,\boldsymbol{a}_{j'}\overset{j'}{\check{+}}c\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_n)|=|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_{j'},\dots,\boldsymbol{a}_n)|$．ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い)．つまり，ある列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない．

また，さらに行列式の転置不変性から (問題 4 補足解説参照)，行列式は行に関しても重要 3 性質を満たし，上の性質を行に置き換えたバージョンも成立する．

上の (i)–(iii) の行のバージョン

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では行ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{d}$ が n 次元行ベクトル)．

(i)′ $\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$\boldsymbol{0}$ は n 次 0 横ベクトル．つまり，0 のみの行があれば行列式は 0.

(ii)′ $\left|\begin{array}{c} \\ \\ j>\\ \\ j'>\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$j\neq j'$. つまり，同じ行があれば行列式は 0.

(iii)′ $\left|\begin{array}{c} \\ \\ j>\\ \\ j'>\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}+c\boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|$. ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い).

つまり，ある行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない．

また，2×2 行列，3×3 行列の行列式は公式として覚えておくと良いだろう．

2 × 2 行列，3 × 3 行列の行列式の公式

- $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc.$
- $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

(サラスの方法)

さて，問題 1 の計算は以下のように行える．

(1)

$$\left|\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right| = (-1)\cdot(-3) - 4\cdot 2 = -5.$$

(2)

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 4\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 5\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - 4\cdot 5\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot(-2)\cdot 1 = -8.$$

(3)

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}\right| &= (-1)^{2+2}\cdot 4\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 2 列に関して余因子展開)} \\ &= 4\cdot(1\cdot 5\cdot(-5) + 2\cdot 2\cdot(-2) + 0\cdot 4\cdot(-4) - 1\cdot 2\cdot(-4) - 2\cdot 4\cdot(-5) - 0\cdot 5\cdot(-2)) \\ &= 60.\end{aligned}$$

なお，(3) については，上に述べた行列式の性質を用いて行列を以下のように簡単にしてから計算するのが良い．

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 1 列の } (-2) \text{ 倍を第 3 列に加えた)} \\ &= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 1 行に関して余因子展開)} \\ &= 4\cdot(-3)\cdot(-5) \\ &= 60.\end{aligned}$$

3 つめの等号は「上三角 (あるいは下三角) 行列の行列式は対角成分の積」であることからわかる．この事実は，上三角の場合は第 1 列目から順に余因子展開すれば，下三角の場合は第 1 行目から順に余因子展開すればわかる． □

問題 2

以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$

問題 2 解答例．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ □

問題 2 補足解説． 逆行列については 2×2 の時は公式を覚えておいた方が良い．

2×2 行列の逆行列の一般形

行列式 $ad-bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

これ以上のサイズの場合は余因子行列を用いる公式があるが，実際の計算においては計算量が多く，理論上は重要ではあるが計算するうえではあまり有用とは言えない．$n\times n$ の行列 A の逆行列については，以下のように求めるのが良いであろう．

(Step 1) $\widetilde{A} = (A \mid I_n)$ という $n\times 2n$ 行列を用意する．(I_n は n 次単位行列．)
(Step 2) $\widetilde{A}$ を行基本変形を用いて簡約化する．
(Step 3) (Step 2) の結果が，$(I_n \mid B)$ という形になれば，$A^{-1}=B$．このような形にならなかった場合は A は正則ではない．

問題 2 の計算は以下のように行える．

(1)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 3-(-1)\cdot(-5)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行基本変形により簡約化する．

$$\tilde{A} \xrightarrow[\text{第 2 行，第 3 行に加える}]{\text{第 1 行の 1 倍，}(-1)\text{ 倍をそれぞれ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行を }(-1)\text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行，第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の }(-1)\text{ 倍，}(-2)\text{ 倍をそれぞれ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 3 行を }(-1)\text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行，第 2 行に加える}]{\text{第 3 行の 1 倍，}(-1)\text{ 倍をそれぞれ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

これより，求める行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$． □

問題 3

A を実数を成分に持つ n 次正方行列とする．以下の性質が「A に逆行列が存在すること」と同値であるかどうかを判定せよ．

(1) $|A| \neq 0$.
(2) $\operatorname{rank} A = n$.

問題 3 解答例.
(1) 同値である
(2) 同値である □

問題 3 補足解説. 実数あるいは複素数を成分に持つ n 次正方行列 A に対して，以下の 4 つが全て同値であったことを思い出しておこう：

(1) A は正則である (=A に逆行列が存在する).
(2) $|A| \neq 0$.
(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである.
(4) $\operatorname{rank}(A) = n$.

これより，A が逆行列を持つかどうか調べるためには行列式 $|A|$ を計算して 0 になるかどうかを調べれば良いのであった. □

問題 4

3 次正方行列 A の行列式の値が 1 であるとき，$-3A$ の行列式の値は$\boxed{\text{ア}}$である．$\boxed{\text{ア}}$に入る整数を半角数字で入力せよ．

問題 4 解答例. -27. □

問題 4 補足解説. 本問は行列の多重線型性を用いて解くことができる．ここで，多重線型性を含む行列式を特徴づける 3 性質について思い出しておこう．

行列式の重要 3 性質

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下の (ii), (iii) では列ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{a}_j$ が n 次元列ベクトル).

(i) $|I_n| = 1$．ただし，I_n は n 次単位行列．(規格化条件)
(ii) 任意の $c, c' \in \mathbb{K}$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, c\boldsymbol{a}_j \overset{\overset{j}{\vee}}{+} c'\boldsymbol{a}'_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| = c|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| + c'|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}'_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)|.$$

(多重線形性)

(iii) 各 $1 \leq j < j' \leq n$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \overset{\overset{j'}{\vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)| = -|(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}}, \ldots, \overset{\overset{j'}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)|$$

(交代性)

さらに，行に関しての多重線形性，交代性も成立する．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では行ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{b}_j$ が n 次元行ベクトル)．

(ii)$'$　任意の $c, c' \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{array}{c} \\ \\ j> \\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{b}_j + c'\boldsymbol{b}'_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\right| = c\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\right| + c'\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}'_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\right|.$$

(多重線形性)

(iii)$'$　各 $1 \leq j < j' \leq n$ に対し，

$$\begin{array}{c} \\ \\ j> \\ \\ j'> \\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{j'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\right| = - \begin{array}{c} \\ \\ j> \\ \\ j'> \\ \\ \\ \end{array}\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{j'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\right|.$$

(交代性)

列に関しての多重線形性，交代性が行に関しての多重線形性，交代性を導くことは以下の行列式の転置不変性から直ちにわかる．

行列式の転置不変性

n を正の整数とする．$m \times n$ 行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (x_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$$

に対して，X の転置 ${}^tX$ を (i,j) 成分を x_{ji} (j と i の順番に注意) とする $n \times m$ 行列

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (x'_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}, \quad x'_{ij} := x_{ji}$$

として定義する．このとき，任意の n 次正方行列 A に対して，

$$|{}^tA| = |A|.$$

問題 4 の計算は以下のように行える．

A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$(ただし，各 $\boldsymbol{a}_k$ は 3 次元列ベクトル) と表示すると，多重線型性より，

$$|-3A| = |(-3\boldsymbol{a}_1, -3\boldsymbol{a}_2, -3\boldsymbol{a}_3)| = (-3)^3\,|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)| = -27|A| = -27.$$

□

問題 5

以下の $\boxed{ア}$ に入る自然数を半角数字で入力せよ．

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 11 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & 0 & 7 & 11\end{pmatrix} = \boxed{ア}$$

問題 5 解答例． 3. □

問題 5 補足解説． 与えられた行列を掃き出し法により簡約化して得られる簡約階段行列の段の数が階数 **(rank)** である．

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 11 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & 0 & 7 & 11\end{pmatrix}$$

を掃き出し法により簡約化する．

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 6 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 11 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 6 & 8\\ 1 & -2 & 0 & 7 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4 行に加える}]{\text{第 1 行の }(-2)\text{ 倍},(-1)\text{ 倍},(-1)\text{ 倍を}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を第 1,4 行に加える}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,4 行に加える}]{\text{第 3 行の 3 倍,8 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

これより，求める階数は 3. □

問題 6

次の連立一次方程式の解の自由度 (解に現れる必要最小限のパラメータの数) は $\boxed{ア}$ である． $\boxed{ア}$ に入る自然数を半角数字で入力せよ．

$$\begin{cases} -z + v - 3w = 0\\ x + y + z - v + w = 0\\ -2x - 2y - 3z + 3v - 5w = 0\\ -x - y - 3z + 3v - 7w = 0\end{cases}$$

問題 6 解答例． 3. □

問題 6 補足解説． 一般に係数行列が $m \times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

(ただし，$b_1, \ldots, b_m$ は定数) を解くためには，拡大係数行列

$$\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b}) \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すればよかった．ここで，$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,\widetilde{A}$ のときこの連立一次方程式は解を持ち，そうでないとき (つまり $\mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\,\widetilde{A}$ のとき) この連立一次方程式は解無しとなるのであった．

本問の連立一次方程式は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので，

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

を簡約化すればよい．この場合は最後の列が全て 0 で，行基本変形の過程においてこの列の成分は常に 0 のままなので，無視して計算しても良い．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により簡約化する．

$$A \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}]{\text{第 1 行を} -1 \text{ 倍し，}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 } 3,4 \text{ 行に加える}]{\text{第 1 行の 2 倍,1 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 } 1,3,4 \text{ 行に加える}]{\text{第 2 行の } (-1) \text{ 倍,1 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この結果から，与えられた連立一次方程式は最後の行列を係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y - 2w = 0 \\ z - v + 3w = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y + 2w \\ z = v - 3w \end{cases}$$

と同値であるということがわかる．よって，$y = s, v = t, w = u$ とおくと，この解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t, u \text{ は任意のパラメータ}$$

とベクトル表示される．これより，解の自由度は 3 である．

一般に係数行列が $m \times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

について，拡大係数行列を $\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ と書くと，

- $\mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\,\widetilde{A}$ のとき，解無し．
- $\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,\widetilde{A}$ のとき，自由度 $n - \mathrm{rank}\,A$ で解を持つ．

ここで，常に $\mathrm{rank}\,A \leq \mathrm{rank}\,\widetilde{A}$ であることに注意．

□