線形代数 II 第 2 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$A = \begin{pmatrix} 47 & 30 \\ -75 & -48 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) A は固有値として $2, -3$ を持つ．それぞれの固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ 1 つ求めよ (つまり，固有値 2 の A の固有ベクトルを 1 つ，固有値 -3 の A の固有ベクトルを 1 つ求める)．ただし，計算過程も説明すること．

(2) A を対角化する 2 次正方行列 P を一つ求め, 対応する $P^{-1}AP$ の結果を記述せよ．答えのみで良い．

(3) $m \in \mathbb{Z}$ としたとき，A^m を計算せよ．ただし，計算過程も説明すること．

問題 1 解答例.

(1) A の固有値 2 の固有ベクトルを求める．x, y に関する連立一次方程式

$$(2I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -30 \\ 75 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい．係数行列 $\begin{pmatrix} -45 & -30 \\ 75 & 50 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて簡約化すると，$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，この方程式は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y$$

と同値である．よって，

$$\begin{pmatrix} -2c \\ 3c \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{2.1}$$

の形のベクトルが A の固有値 2 の固有ベクトルである[*1]．同様にして固有値 -3 の固有ベクトルを求める．x, y に関する連立一次方程式

$$(-3I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & -30 \\ 75 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい．係数行列 $\begin{pmatrix} -50 & -30 \\ 75 & 45 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて簡約化すると，$\begin{pmatrix} 1 & 3/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，この方程式は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}y$$

と同値である．よって，

$$\begin{pmatrix} -3c \\ 5c \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{2.2}$$

の形のベクトルが A の固有値 -3 の固有ベクトルである． □

* *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 この形のベクトルを具体的な c について 1 つ見つけられていれば正解です．

(2) (2.1), (2.2) の形のベクトルをそれぞれ選んで並べ ($c = 1$ とした)，

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

とするとこれは正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

となる． □

(3) (2) の P を用いると，(2) より，

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-3)^m \end{pmatrix}.$$

この辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けて，

$$A^m = P \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-3)^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

いま，

$$P^{-1} = \frac{1}{(-2)\cdot 5 - (-3)\cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-3)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\cdot 2^{m+1} + 3\cdot(-3)^{m+1} & 3\cdot 2^{m+1} + 2\cdot(-3)^{m+1} \\ -15\cdot 2^m + 15\cdot(-3)^m & -9\cdot 2^m + 10\cdot(-3)^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

問題 1 補足解説． 第 2 回講義資料注意 1 で見たように，n 次正方行列 A の固有値が先にわかってしまえば，そこから対応する A の固有ベクトルを求めるのは (1) のように単に連立方程式を解くだけとなる．連立一次方程式の解き方については第 1 回本レポート課題解答例の問題 6 補足解説を参考にしてもらいたい．どうやって固有値を先に知るかについては今後の講義で扱う．

第 2 回講義資料定理 2.3 で見たように，A を対角化する行列は A の固有ベクトルを並べて正則行列を作ることで与えられるのであった．本問の場合，実は A の固有値 $2, -3$ の固有ベクトルそれぞれ一つずつ並べれば必ず正則になる．よって，(2) は

$$P = \begin{pmatrix} -2c_1 & -3c_2 \\ 3c_1 & 5c_2 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} -3c_1 & -2c_2 \\ 5c_1 & 3c_2 \end{pmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

という形に取れていれば何でも正解である．左の形のものを P として取った場合は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

となり，右の形のものを P として取った場合は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる (第 2 回講義資料定理 2.3)．この $P^{-1}AP$ の計算では P^{-1} の具体的な計算や，行列式の定義に基づいた $P^{-1}AP$ の計算は行う必要がないということに注意しよう．

(3) の m 乗計算は第 1 回講義資料例 1, 2 で扱った通りである．ここでは P^{-1} の具体形が必要になる．逆行列の計算については第 1 回本レポート課題解答例の問題 2 補足解説を参考にしてもらいたい．

本問は (1), (2), (3)全て検算可能な問題である．(1) であれば計算結果が実際に固有ベクトルを与えているか，(2) であれば具体的な計算結果が対角行列になっているか，(3) であれば $m = 0$ で単位行列，$m = 1$ で A を与えるようになっているか (時間があれば $m = 2$ で A^2 になっているかくらいまで計算できると安心である) を確かめれば良い．検算可能な問題では検算を行って，ミスを減らせるようにしてもらいたい． □

問題 2

A, B を n 次正方行列とし，

$$AB - BA = 2B$$

が成立しているとする．さらに，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ を固有値 λ の$\underline{A\text{ の}}$固有ベクトルで $B\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を満たすものとする．このとき，$B\boldsymbol{v}$ も$\underline{A\text{ の}}$固有ベクトルであることを示し，$B\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

問題 2 解答例． 仮定より，

$$AB = BA + 2B, \qquad A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

が成立しているので，

$$A(B\boldsymbol{v}) = (AB)\boldsymbol{v} = (BA + 2B)\boldsymbol{v} = B(A\boldsymbol{v}) + 2B\boldsymbol{v} = B(\lambda\boldsymbol{v}) + 2B\boldsymbol{v} = (\lambda + 2)B\boldsymbol{v}.$$

いま $B\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なので，この式は $B\boldsymbol{v}$ が A の固有値 $\lambda + 2$ の固有ベクトルであることを示している． □

問題 2 補足解説． 本問は $AB - BA = 2B$ を満たす行列の組を持っている場合，**A の固有ベクトルを 1 つ見つければそこに B をどんどん掛けることで (0 にならない限り) A の新たな固有ベクトルを見つけていける**ということを示している．このような考え方は実はこの先の進んだ数学 (例えば表現論等) において良く用いられる便利な考え方である．具体的な例を 1 つだけ見ておこう．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B \end{aligned}$$

となるので，これは本問の仮定を満たしている．いま，

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有値 -2 の固有ベクトルである．このとき，

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は確かに，

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので A の固有値 $0(= -2 + 2)$ の固有ベクトルであり，さらに

$$B^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は確かに，

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

なので A の固有値 $2(=0+2)$ の固有ベクトルである．

なお，一般に n 次正方行列 A,B が

$$AB-BA=cB\quad(c\in\mathbb{C})$$

を満たしているとき，$\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ が固有値 λ の$\underline{A\text{ の}}$固有ベクトルで $B\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ を満たすものであれば，$B\boldsymbol{v}$ も$\underline{A\text{ の}}$固有ベクトルで，対応する A の固有値が $\lambda+c$ であるものとなる．証明は問題 2 解答例の『2』を『c』に変えれば全く同じである．特に $c=0$ であれば，これは『$AB=BA$ のとき，固有値 λ の A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $B\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ を満たすのであれば，$B\boldsymbol{v}$ も同じ固有値 λ の A の固有ベクトルである』という性質を示している． □