線形代数 II 第 3 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$ とする．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を全て求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

(2) (1) で求めた A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ 1 つずつ求めよ．

(3) A を対角化する 3 次正方行列 P を一つ求め，対応する $P^{-1}AP$ の結果を記述せよ．答えのみで良い．

問題 1 解答例.

(1) A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) = |tI_3 - A| &= \left|\begin{pmatrix} t-2 & -3 & -4 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 3 & 3 & t+5 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} t+2 & -3 & -4 \\ 0 & t-1 & -1 \\ -t-2 & 3 & t+5 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に第 3 列の} -1 \text{倍を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t+2 & -3 & -4 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に第 1 行の 1 倍を加えた}) \\
&= (t+2)(t-1)(t+1)
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-2, -1, 1$ で全てである．□

(2) A の固有値 -2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $-2I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の解は，

$$\left\{ c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}$$

となる．よって，A の固有値 -2 に対応する固有ベクトルの 1 つとして，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

が取れる[*1]．

A の固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $-I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の解は，

$$\left\{ c\begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}$$

となる．よって，A の固有値 -1 に対応する固有ベクトルの 1 つとして，

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が取れる．

A の固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の解は，

$$\left\{ c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}$$

となる．よって，A の固有値 1 に対応する固有ベクトルの 1 つとして，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる． □

(3) (2) で求めた固有ベクトルを並べて，

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$|P| = 2 \neq 0$ となるので，P は正則である．P の列ベクトルは左から順に固有値 $-2, -1, 1$ に対する A の固有ベクトルなので，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である． □

[*1] このベクトルの 0 でない定数倍であれば何でも OK です．以下も同様です．

問題 1 補足解説. まず固有値を求めるには固有方程式を解けば良いのであった (第 3 回講義資料定理 3.2). 固有値がわかれば，そこから対応する固有ベクトルは連立一次方程式を解くことで求められる (第 2 回講義資料注意 1). さらに，n 次正方行列 A を対角化する行列 P は A の固有ベクトルを並べて正則行列を作ることで与えられるのであった (第 2 回講義資料定理 2.3). 第 3 回講義資料事実 3.5 で述べたように，実は n 次正方行列 A が相異なる n 個の固有値を持つとき，必ず対角化可能であり，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを並べれば必ず n 次正則行列が得られる．この事実については次回の講義でより詳しく扱う．P の第 i 列が A の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルであれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．特に，この $P^{-1}AP$ の計算では P^{-1} の具体的な計算や，行列式の定義に基づいた $P^{-1}AP$ の計算は行う必要がなかったということを思い出そう (もちろん検算のために行っても良い). □

問題 2

3 次正方行列 A が，

$${}^tAA = I_3 \ ({}^tA \text{ は } A \text{ の転置}), \qquad |A| = 1$$

を満たすとする (このような行列を 3 **次特殊直交行列**という)．このとき，A は必ず 1 を固有値に持つということを証明せよ．(Hint:「1 を固有値に持つ」という条件を行列式を用いた同値な条件に言い換え，A がそれを満たすことを示そう．また，行列式が転置不変性をもつことにも注意しよう．)

問題 2 解答例. 3 次正方行列 X が 1 を固有値に持つことと，その固有方程式 $\Phi_X(t) = |tI_3 - X| = 0$ が 1 を解に持つこと，つまり，$|I_3 - X| = 0$ が成立することは同値である．よって，$|I_3 - A| = 0$ となることを示せば良い．$|A| = 1$ なので，行列式の転置不変性より，$|{}^tA| = 1$．これより，

$$\begin{aligned} |I_3 - A| &= |{}^tA||I_3 - A| = |{}^tA(I_3 - A)| = |{}^tA - {}^tAA| = |{}^tA - I_3| \quad (\text{仮定より}) \\ &= |-(I_3 - {}^tA)| = (-1)^3|I_3 - {}^tA| = -|I_3 - {}^tA| \quad (\text{行列式の多重線形性より}) \\ &= -|{}^t(I_3 - A)| = -|I_3 - A| \quad (\text{行列式の転置不変性より}) \end{aligned}$$

となる．よって，$|I_3 - A| = 0$ となることがわかる．以上より，示すべきことは示された． □

問題 2 補足解説. 3 次特殊直交行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t) = |tI_3 - A|$ について，“t を残したまま” 解答例のように計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= |tI_3 - A| \\ &= |{}^tA||tI_3 - A| = |{}^tA(tI_3 - A)| = |t{}^tA - {}^tAA| = |t{}^tA - I_3| \quad (\text{仮定より}) \\ &= |-t((1/t)I_3 - {}^tA)| = (-t)^3|(1/t)I_3 - {}^tA| = -t^3|(1/t)I_3 - {}^tA| \quad (\text{行列式の多重線形性より}) \\ &= -t^3|{}^t((1/t)I_3 - A)| = -t^3|(1/t)I_3 - A| \quad (\text{行列式の転置不変性より}) \\ &= -t^3\Phi_A(1/t).^{*2} \end{aligned}$$

ここで，第 3 回講義資料命題 3.3 より，$\Phi_A(t)$ はある定数 $c_1 \in \mathbb{K}$ を用いて，

$$\Phi_A(t) = t^3 - \mathrm{Tr}(A)t^2 + c_1t - |A| = t^3 - \mathrm{Tr}(A)t^2 + c_1t - 1$$

と書けるが，$\Phi_A(t) = -t^3\Phi_A(1/t)$ より，

$$t^3 - \mathrm{Tr}(A)t^2 + c_1t - 1 = -t^3((1/t)^3 - \mathrm{Tr}(A)(1/t)^2 + c_1(1/t) - 1) = t^3 - c_1t^2 + \mathrm{Tr}(A)t - 1.$$

---

*2 ちなみに ${}^tAA = I_n$, $|A| = 1$ を満たす行列を n **次特殊直交行列**と呼ぶが，n が奇数であれば n 次特殊直交行列 A に対して，ここでの計算と全く同じ方法で $\Phi_A(t) = -t^n\Phi_A(1/t)$ がわかる．

よって，$c_1 = \mathrm{Tr}(A)$ である．これより，一般に 3 次特殊直交行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は

$$\Phi_A(t) = t^3 - \mathrm{Tr}(A)t^2 + \mathrm{Tr}(A)t - 1$$

と非常に簡単に計算できることがわかる．さらに，これは

$$\Phi_A(t) = (t-1)(t^2 - (\mathrm{Tr}(A) - 1)t + 1)$$

と因数分解されるので，一般に A の固有値は

$$\lambda = 1,\ \frac{(\mathrm{Tr}(A) - 1) \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}(A) - 1)^2 - 4}}{2}$$

となる．

3 次特殊直交行列の例を見ておこう．実は実 3 次特殊直交行列は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ における回転を表す行列となる (この意味で 3 次特殊直交行列は**回転行列**とも呼ばれる)．例えば，

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸を回転軸とする θ 回転を表す行列であるが，これらは 3 次特殊直交行列である．さらに，これらを任意に沢山かけ合わせた行列

$$R_x(\theta_1)R_y(\theta_2)R_z(\theta_3)R_x(\theta_4)\cdots$$

も 3 次特殊直交行列となる．これは，A, B が 3 次直交行列のとき，

$$\begin{aligned} &{}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_3B = {}^tBB = I_3. \\ &|AB| = |A||B| = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

より，AB も 3 次特殊直交行列となるという事実からわかる．本問で示した「3 次特殊直交行列は必ず 1 を固有値に持つ」という事実は，実は「3 次元空間における原点を中心とする球体」の中心を固定する運動は必ず回転軸を持つ回転となるという事実に対応している．3 次特殊直交行列 A は上のような球体の中心を固定する運動を表す行列となるが (これは今後の講義でもう少し扱います)，この A が固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を必ず持つということは $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{v}$ が必ず存在するということを意味している．これが上に述べたような運動には必ず「動かない方向 (回転軸) がある」という事実に対応しているのである． □