線形代数 II 第 4 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列がそれぞれ対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能な場合には行列を対角化する正則行列 P を求めたうえで行列を対角化せよ．ただし，計算の過程も記述すること．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-3\\-1&1&3\end{pmatrix}\qquad (2)\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

問題 1 解答例.

(1) A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t)&=\left|\begin{pmatrix}t-1&-1&-1\\-2&t&3\\1&-1&t-3\end{pmatrix}\right|\\&=\left|\begin{pmatrix}t-2&-1&-1\\t-2&t&3\\0&-1&t-3\end{pmatrix}\right|\quad(\text{第 1 列に第 2 列を加えた})\\&=\left|\begin{pmatrix}t-2&-1&-1\\0&t+1&4\\0&-1&t-3\end{pmatrix}\right|\quad(\text{第 2 行に第 1 行の }-1\text{ 倍を加えた})\\&=(t-2)\left|\begin{pmatrix}t+1&4\\-1&t-3\end{pmatrix}\right|=(t-2)(t^2-2t+1)=(t-1)^2(t-2)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 1(重複度 2), 2(重複度 1) である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを考える．それは x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&1&3\\1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

の解として得られるが，係数行列 I_3-A を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$3-\mathrm{rank}(I_3-A)=3-2=1<2(=\text{固有値 1 の重複度})$$

となるので，A は対角化不可能である． □

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(2) B の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_B(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & -1 & -1 & -1 \\ -t & t-1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列の} -1 \text{ 倍を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & -1 & -1 \\ -t & t & -1 & -1 \\ 0 & -t & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に第 3 列の} -1 \text{ 倍を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ -t & t & 0 & -1 \\ 0 & -t & t & -1 \\ 0 & 0 & -t & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 列に第 4 列の} -1 \text{ 倍を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & 0 & -2 \\ 0 & -t & t & -1 \\ 0 & 0 & -t & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 行に第 1 行を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & 0 & -2 \\ 0 & 0 & t & -3 \\ 0 & 0 & -t & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に第 2 行を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & 0 & -2 \\ 0 & 0 & t & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に第 2 行を加えた}) \\
&= t^3(t-4)
\end{aligned}$$

となるので，B の固有値は 0(重複度 3), 4(重複度 1) である．

固有値 0 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(0I_4 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $-B$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$4 - \operatorname{rank}(0I_4 - B) = 4 - 1 = 3 (= \text{固有値 } 0 \text{ の重複度})$$

となる．B の重複度 2 以上の固有値は 0 のみなので，これより，B は対角化可能であることがわかる．さらに上の簡約化の結果より，上の連立一次方程式の解は

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．これらは固有値 0 に対する固有ベクトルである．

固有値 4 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(4I_4 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $-B$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の解は

$$\left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{C} \right\}.$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．これは固有値 4 に対する固有ベクトルである．

以上より，B は対角化可能で，

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる． □

問題 1 補足解説. n 次正方行列の対角化可能性の判定，および対角化に用いる正則行列を求める手順については第 4 回講義資料 p.2–3 の手順に従えば良い．対角化可能性から判定する問題においては重複度が 2 以上の固有値から固有ベクトルをまず求めるのが得策であったということを思い出そう (第 4 回講義資料 p.4 下部の注釈参照)．例えば本問 (1) で固有値 -2 に対応する固有ベクトルを考えても，それは結局必要のない計算となってしまう．

なお，十分計算に慣れている方は，(2) の B の固有ベクトルとして

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れることは，固有多項式などを計算しなくてもわかってしまうかもしれない．その場合は，いきなりこれらのベクトルを持ってきて，確かに固有ベクトルであることを確認したあと，これらを並べた行列が正則であることを確認して，$P^{-1}BP$ の結果を求めてしまっても構わない． □