

# 線形代数 II 第 5 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)\*

## 問題 1

行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定せよ。

問題 1 解答例. 対角化不可能である. □

問題 1 補足解説. 対角化不可能性は以下のように示される.

$A$  の固有多項式は,

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t+2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ -7 & t-1 & -4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & t-5 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & t+1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-1) \left| \begin{pmatrix} t+2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & t+1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列目に関して余因子展開}) \\ &= (t-1) \left| \begin{pmatrix} t+2 & 4 & 2 & 1 \\ t-1 & t-1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & t+1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 行に第 1 行を加えた}) \\ &= (t-1) \left| \begin{pmatrix} t-2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & t+1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\ &= (t-1)^2 \left| \begin{pmatrix} t-2 & 2 & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ -3 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 行目に関して余因子展開}) \\ &= (t-1)^2 \left| \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 1 \\ 0 & t+1 & -1 \\ t-1 & 2 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 3 列を加えた}) \\ &= (t-1)^2 \left| \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 1 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 3 行に第 1 行を加えた}) \\ &= (t-1)^3 (t+1)^2 \end{aligned}$$

となるので,  $A$  の固有値は  $1$ (重複度  $3$ ),  $-1$ (重複度  $2$ ) である.

いま,

$$-I_5 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ -7 & -2 & -4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\* e-mail: hoya@shibaura-it.ac.jp

となる。よって、

$$5 - \text{rank}(-I_5 - A) = 5 - 4 = 1 < 2 (= \text{固有値 } -1 \text{ の重複度})$$

となるので、 $A$  は対角化不可能である。

この方針は第4回講義資料 p.2 の手順そのものである。ちなみに、

$$I_5 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$5 - \text{rank}(I_5 - A) = 5 - 2 = 3 (= \text{固有値 } 1 \text{ の重複度})$$

であり、こちらについては連立一次方程式  $(I_5 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解の自由度と固有値 1 の重複度が一致している。よって、固有値  $-1$  の方を見てみると、 $A$  が対角化可能か不可能かは判断がつかない。

重複度 2 以上の固有値については、その重複度と対応する連立一次方程式の解の自由度が一致しないものがどれであることを事前を知る一般的な方法は無いので、基本的には順番に調べていくことになる。上に書いた対角化不可能性の証明は、最短で書くために固有値  $-1$  の方をいきなり確認して対角化不可能性を導いているが、基本的には固有値 1 と  $-1$  について上記のような計算を順に行っていくことになる。□

## 問題 2

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定せよ。

問題 2 解答例. 対角化可能である。□

問題 2 補足解説. 対角化可能性は以下のように示される。

$A$  の固有多項式は,

$$\begin{aligned}
 \Phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ -3 & t-5 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & t+1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 & 3 & t+4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ -t+2 & t-5 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & t+1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & t+4 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列に第 2 列の } -1 \text{ 倍を加えた)} \\
 &= \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & t+1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & t+4 \end{vmatrix} && \text{(第 2 行に第 1 行を加えた)} \\
 &= (t-2) \begin{vmatrix} t-5 & 12 & -6 & -6 \\ -1 & t+1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & t+4 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列目に関して余因子展開)} \\
 &= (t-2) \begin{vmatrix} t+1 & 12 & -6 & -6 \\ 0 & t+1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & -2 \\ -t-1 & -6 & 3 & t+4 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列に第 4 列の } -1 \text{ 倍を加えた)} \\
 &= (t-2) \begin{vmatrix} t+1 & 12 & -6 & -6 \\ 0 & t+1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & t-2 \end{vmatrix} && \text{(第 4 行に第 1 行を加えた)} \\
 &= (t-2)(t+1) \begin{vmatrix} t+1 & -1 & -1 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 6 & -3 & t-2 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列目に関して余因子展開)} \\
 &= (t-2)(t+1) \begin{vmatrix} t+1 & -1 & -1 \\ -2t-2 & t+1 & 0 \\ 6 & -3 & t-2 \end{vmatrix} && \text{(第 2 行に第 1 行の } -2 \text{ 倍を加えた)} \\
 &= (t-2)(t+1) \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & -3 & t-2 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列に第 2 列の } 2 \text{ 倍を加えた)} \\
 &= (t-2)(t+1)(t-1) \begin{vmatrix} t+1 & 0 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列目に関して余因子展開)} \\
 &= (t-2)^2(t+1)^2(t-1)
 \end{aligned}$$

となるので,  $A$  の固有値は 2(重複度 2),  $-1$ (重複度 2),  $1$ (重複度 1) である.

いま,

$$2I_5 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$5 - \text{rank}(2I_5 - A) = 5 - 3 = 2 (= \text{固有値 } 2 \text{ の重複度})$$

である. 次に,

$$-I_5 - A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$5 - \text{rank}(-I_5 - A) = 5 - 3 = 2 (= \text{固有値 } -1 \text{ の重複度})$$

である。以上より、 $A$  は対角化可能であることが示された。

この方針も第 4 回講義資料 p.2 の手順そのものである。固有値 1 の重複度は 1 なので、 $\text{rank}(I_5 - A)$  の計算はしなくても良かったということにも注意しよう (自動的に  $5 - \text{rank}(I_5 - A) = 1$  が成立する)。ちなみに、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。 □

### 問題 3

以下の性質 (1), (2), (3) のそれぞれについて、それを満たす複素 3 次正方行列  $A$  が存在し得るかどうかを判定せよ。ここで、 $V_A(\lambda)$  は講義資料定義 5.4 のものを指すことにする ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )。

- (1)  $V_A(0) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(1) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(2) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(3) \neq \{\mathbf{0}\}$  となる。
- (2) 一次独立なベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_A(-1)$  と一次独立なベクトルの組  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V_A(1)$  が存在する。
- (3)  $V_A(\sqrt{-1}) = \mathbb{C}^3$  となる。

### 問題 3 解答例.

- (1) これを満たす  $A$  は存在しない。
- (2) これを満たす  $A$  は存在しない。
- (3) これを満たす  $A$  は存在する。 □

問題 3 補足解説.  $\lambda \in \mathbb{C}$  と 3 次正方行列  $A$  に対し、

$$V_A(\lambda) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 \mid A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

である。定義より、 $V_A(\lambda)$  の  $\mathbf{0}$  でない元は  $A$  の固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルである。

- (1) 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して、 $\mathbf{0} \in V_A(\lambda)$  なので、 $V_A(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$  であるということは、 $V_A(\lambda)$  が  $\mathbf{0}$  以外の元を含むということである。よって、 $V_A(0) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(1) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(2) \neq \{\mathbf{0}\}, V_A(3) \neq \{\mathbf{0}\}$  であるとき、 $A$  は固有値 0, 1, 2, 3 の固有ベクトルを持つということになるが、 $A$  は 3 次正方行列なので持ちうる固有値は高々 3 つである。よって、これを満たすような 3 次正方行列  $A$  は存在しない。
- (2) このとき、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  も一次独立となる。これは以下のように示される。 $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$  によって、

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

となったとすると、命題 2.2 より  $\mathbf{v} := c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in V_A(-1), \mathbf{w} := d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 \in V_A(1)$ 。いま、定理 5.6 より、 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  の両方が  $\mathbf{0}$  でなければ  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  は一次独立となるが、 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$  なので矛盾。よって、 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  のいずれかは  $\mathbf{0}$  あるが、やはり  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$  より、このとき  $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ 。よって、

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \text{ かつ } d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}.$$

ここで、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  は一次独立、 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  は一次独立なので、このとき  $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$ 。以上より、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  が一次独立であることがわかった。

定理 5.1 より,  $\mathbb{C}^3$  に 4 つの元からなる一次独立な元の組は存在しないので, このような状況は存在し得ない.

(3)  $V_A(\sqrt{-1}) = \mathbb{C}^3$  は, 任意の  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3$  に対し,  $A\boldsymbol{v} = \sqrt{-1}\boldsymbol{v}$  となることと同値であるが,

$$A = \sqrt{-1}I_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

とすればこの性質は満たされる (この  $A$  が (3) を満たす唯一の  $A$  である).

一般に,  $n$  次正方行列  $A$  に対して,  $V_A(\lambda) = \mathbb{K}^n$  となることと  $A = \lambda I_n$  となることは同値である ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$ ). □