線形代数 II 第 6 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & -10 & 20 \\ 5 & -4 & -3 & 12 & -22 \\ 1 & -4 & -2 & 5 & -7 \\ 6 & -12 & -6 & 22 & -37 \\ 1 & -5 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) ケイリー・ハミルトンの定理を用いて A^5 を求めよ．ただし，計算の仮定も記述すること．

(2) A^{100} を求めよ．ただし，計算の仮定も記述すること．

問題 1 解答例.

(1) A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t+5 & -2 & -2 & 10 & -20 \\ -5 & t+4 & 3 & -12 & 22 \\ -1 & 4 & t+2 & -5 & 7 \\ -6 & 12 & 6 & t-22 & 37 \\ -1 & 5 & 2 & -7 & t+11 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 0 & 4t+18 & t^2+7t+8 & -5t-15 & 7t+15 \\ 0 & t-16 & -5t-7 & 13 & -13 \\ -1 & 4 & t+2 & -5 & 7 \\ 0 & -12 & -6t-6 & t+8 & -5 \\ 0 & 1 & -t & -2 & t+4 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行を用いて掃き出し}) \\
&= -\left|\begin{pmatrix} 4t+18 & t^2+7t+8 & -5t-15 & 7t+15 \\ t-16 & -5t-7 & 13 & -13 \\ -12 & -6t-6 & t+8 & -5 \\ 1 & -t & -2 & t+4 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列目に関して余因子展開}) \\
&= -\left|\begin{pmatrix} 4t+18 & 5t^2+25t+8 & 3t+21 & -4t^2-27t-57 \\ t-16 & t^2-21t-7 & 2t-19 & -t^2+12t+51 \\ -12 & -18t-6 & t-16 & 12t+43 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列を用いて掃き出し}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5t^2+25t+8 & 3t+21 & -4t^2-27t-57 \\ t^2-21t-7 & 2t-19 & -t^2+12t+51 \\ -18t-6 & t-16 & 12t+43 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 4 行目に関して余因子展開}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} 5t^2+79t+26 & 69 & -4t^2-63t-186 \\ t^2+15t+5 & 13 & -t^2-12t-35 \\ -18t-6 & t-16 & 12t+43 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行の } -3 \text{ 倍，} -2 \text{ 倍をそれぞれ第 1 行，第 2 行に加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} 4t+1 & 4 & t^2-3t-11 \\ t^2+15t+5 & 13 & -t^2-12t-35 \\ -18t-6 & t-16 & 12t+43 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 行の } -5 \text{ 倍を第 1 行に加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} 4t+1 & 4 & t^2-3t-11 \\ t^2+3t+2 & 1 & -4t^2-3t-2 \\ -18t-6 & t-16 & 12t+43 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 行の } -3 \text{ 倍を第 2 行に加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} -4t^2-8t-7 & 0 & 17t^2+9t-3 \\ t^2+3t+2 & 1 & -4t^2-3t-2 \\ -t^3+13t^2+28t+26 & 0 & 4t^3-61t^2-34t+11 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 行を用いて掃き出し}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} -4t^2-8t-7 & 17t^2+9t-3 \\ -t^3+13t^2+28t+26 & 4t^3-61t^2-34t+11 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列目に関して余因子展開}) \\
&= (-4t^2-8t-7)(4t^3-61t^2-34t+11)-(17t^2+9t-3)(-t^3+13t^2+28t+26) \\
&= t^5+1.
\end{aligned}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

よって，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$$A^5 + I_5 = O.$$

これより，$A^5 = -I_5$.

(2) (1) より，

$$A^{100} = (A^5)^{20} = (-I_5)^{20} = I_5.$$

$\square$

問題 1 補足解説. 本問はケイリー・ハミルトンの定理を用いた行列の冪の計算問題である．これまで，行列の冪の計算方法としては対角化が使えるということを述べていたが，このように (特に固有多項式が簡単になれば) ケイリー・ハミルトンの定理を用いる方法もある (ちなみに対角化を計算するにしても結局固有多項式は求めるのであった)．(1) の計算はかなり煩雑なものとなるが，変数 t が入った計算を避けようと思えば以下のような求め方もある．

命題 3.3 より，A の固有多項式はある $a, b, c \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$\Phi_A(t) = t^5 - \mathrm{Tr}(A)t^4 + at^3 + bt^2 + ct - |A|$$

と書ける．いま，

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & -10 & 20 \\ 5 & -4 & -3 & 12 & -22 \\ 1 & -4 & -2 & 5 & -7 \\ 6 & -12 & -6 & 22 & -37 \\ 1 & -5 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix} = (-5) + (-4) + (-2) + 22 + (-11) = 0,$$

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & -10 & 20 \\ 5 & -4 & -3 & 12 & -22 \\ 1 & -4 & -2 & 5 & -7 \\ 6 & -12 & -6 & 22 & -37 \\ 1 & -5 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix}\right| = -1$$

である (行列式の方は掃き出しなどを用いながらいつものように計算する) ので，

$$\Phi_A(t) = t^5 + at^3 + bt^2 + ct + 1 \tag{$*$}$$

さらに，

$$\Phi_A(1) = |I_5 - A| = \left|\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 10 & -20 \\ -5 & 5 & 3 & -12 & 22 \\ -1 & 4 & 3 & -5 & 7 \\ -6 & 12 & 6 & -21 & 37 \\ -1 & 5 & 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}\right| = 2$$

$$\Phi_A(-1) = |-I_5 - A| = \left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 10 & -20 \\ -5 & 3 & 3 & -12 & 22 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & 7 \\ -6 & 12 & 6 & -23 & 37 \\ -1 & 5 & 2 & -7 & 10 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Phi_A(2) = |2I_5 - A| = \left|\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & 10 & -20 \\ -5 & 6 & 3 & -12 & 22 \\ -1 & 4 & 4 & -5 & 7 \\ -6 & 12 & 6 & -20 & 37 \\ -1 & 5 & 2 & -7 & 13 \end{pmatrix}\right| = 33$$

である (これらも掃き出しなどを用いながらいつものように計算する) ので，$(*)$ より，

$$\begin{cases} a+b+c+2 = 2 \\ -a+b-c = 0 \\ 8a+4b+2c+33 = 33 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 3$ なので，上を満たす a, b, c は $a = b = c = 0$ のみ．よって，$\Phi_A(t) = t^5 + 1$.

上の方法だと t の入った行列式の計算は不要となる．ただ，その代わり 5 次正方行列の行列式を 4 回計算することになるのでこれは好みが分かれるところかもしれない． $\square$

問題 2

複素 2 次正方行列 A が固有値 $2, 3$ を持つとする．このとき，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2$ に対して，$(A-2I_2)\boldsymbol{v}$ は $\mathbf{0}$ でなければ A の固有値 3 の固有ベクトルとなることを示せ．

問題 2 解答例． A は 2 次正方行列で固有値 $2, 3$ を持つのでそれぞれの固有値の重複度は 1 で，A の固有多項式は

$$\Phi_A(t) = (t-3)(t-2)$$

となる．これより，ケイリー・ハミルトンの定理から，

$$(A-3I_2)(A-2I_2) = O$$

となる．これより，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$\mathbf{0} = O\boldsymbol{v} = (A-3I_2)(A-2I_2)\boldsymbol{v} = A(A-2I_2)\boldsymbol{v} - 3I_2(A-2I_2)\boldsymbol{v} = A(A-2I_2)\boldsymbol{v} - 3(A-2I_2)\boldsymbol{v}$$

となる．すなわち，

$$A(A-2I_2)\boldsymbol{v} = 3(A-2I_2)\boldsymbol{v}$$

が成立するので，$(A-2I_2)\boldsymbol{v}$ は $\mathbf{0}$ でなければ A の固有値 3 の固有ベクトルである． □

問題 2 補足解説． 解答例と全く同様の証明で $(A-3I_2)\boldsymbol{v}$ は $\mathbf{0}$ でなければ A の固有値 2 の固有ベクトルであることがわかる．ここで，

$$I_2 = (A-2I_2) - (A-3I_2)$$

であることに注意すると，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2$ に対し，

$$\boldsymbol{v} = I_2\boldsymbol{v} = ((A-2I_2)-(A-3I_2))\boldsymbol{v} = \underbrace{(A-2I_2)\boldsymbol{v}}_{\text{固有値 3 の固有ベクトル}} + \underbrace{-(A-3I_2)\boldsymbol{v}}_{\text{固有値 2 の固有ベクトル}}$$

とできる．よって，$\mathbb{C}^2$ の元を固有値 3 の固有ベクトルと固有値 2 の固有ベクトルの和で書くとき，

- $A-2I_2$ を掛けるという操作は固有値 3 の固有ベクトル成分を取り出す操作
- $-(A-3I_2)$ を掛けるという操作は固有値 2 の固有ベクトル成分を取り出す操作

になっているということがわかる．このように，$\mathbb{C}^2$ の各元から固有値ごとの成分を取り出すという操作を具体的に行列の形で実現する方法が得られるというのがケイリー・ハミルトンの定理の応用の一つである．

より一般に，n 次正方行列 A が相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとき，A の固有多項式は

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$$

である．よって，ケイリー・ハミルトンの定理から

$$(A-\lambda_1 I_n)\cdots(A-\lambda_n I_n) = O.$$

ここで，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\widetilde{P}_i \coloneqq (A-\lambda_1 I_n)\cdots(A-\lambda_{i-1}I_n)(A-\lambda_{i+1}I_n)\cdots(A-\lambda_n I_n) \quad ((A-\lambda_i I_n) \text{ のみ抜かしたもの})$$

とする．このとき，上の解答例と全く同様の証明から，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\widetilde{P}_i\boldsymbol{v}$ は $\mathbf{0}$ でなければ A の固有値 λ_i の固有ベクトルである．

ここで，

$$f_i(t) \coloneqq (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_n)$$

とすると，

$$1 = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{f_i(t)}{f_i(\lambda_i)}$$

であった[*1]．この計算より，

$$I_n = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{1}{f_i(\lambda_i)} \widetilde{P}_i$$

となることがわかる．よって，

$$P_i \coloneqq \frac{1}{f_i(\lambda_i)} \widetilde{P}_i$$

とおくと，$I_n = P_1 + \cdots + P_n$ であり，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し，

$$\boldsymbol{v} = I_n \boldsymbol{v} = (P_1 + \cdots + P_n)\boldsymbol{v} = \underbrace{P_1 \boldsymbol{v}}_{\text{固有値}\lambda_1\text{の固有ベクトル}} + \cdots + \underbrace{P_n \boldsymbol{v}}_{\text{固有値}\lambda_n\text{の固有ベクトル}}$$

とできる．これより，$\mathbb{C}^n$ の元を A の固有ベクトルらの和で書くとき，P_i を掛けるという操作は固有値 λ_i の固有ベクトル成分を取り出す操作になっているということがわかる．この話は最初の話の一般化になっている $(P_1 = \frac{1}{3-2}(A - 2I_2) = A - 2I_2,\ P_2 = \frac{1}{2-3}(A - 3I_2) = -(A - 3I_2))$．ここで見た P_i らは**射影**と呼ばれる．また，固有値 λ_i の固有ベクトル成分を取り出す操作を与えていることから，

$$P_i^2 = P_i, \quad P_i P_j = O \quad (i \neq j \text{ のとき})$$

となることもわかる．

興味のある方向け． 上では n 次正方行列 A が相異なる固有値を持つ場合を考えていたが，ケイリー・ハミルトンの定理は全ての複素 n 次正方行列に対して成立する．一般に固有多項式を，

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

という形で書いたときに，上と同様の考察が行えるかどうかを考えてみよ[*2](ちなみに，A が対角化不可能な場合は全ての $\mathbb{C}^n$ の元が固有ベクトルらの和として書けるわけではないことに注意．固有ベクトルというものを何らかの意味で一般化して考える必要があります．自分で調べたい場合「広義固有空間分解」というキーワードで調べて見ると何かわかるかもしれません．) □

[*1] 右辺は t の $n-1$ 次以下の多項式であるが，相異なる n 個の複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ での値が全て 1 となる．これを満たす $n-1$ 次以下の多項式は 1 のみである．

[*2] 何か自分で考えたものができればご連絡ください