線形代数 II 第 7 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ととる．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を求めよ．ただし，ここでの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を第 7 回講義資料 p.9 のアルゴリズムの説明にあらわれる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ としてグラム・シュミットの直交化を行うこと (つまり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の順番はこのまま入れ替えずにグラム・シュミットの直交化を行う)．計算の仮定も記述すること．

問題 1 解答例． まず，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}'_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}'_3 &\coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1/5}{15/25}\begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}'_4 &\coloneqq \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_4)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_4)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_3, \boldsymbol{v}_4)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_3, \boldsymbol{u}'_3)_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}'_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2/5}{15/25}\begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} - \frac{(-1/3)}{30/36}\begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 5/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{u}_4'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよいので，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ は，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{10}\\2/\sqrt{10}\\-1/\sqrt{10}\\-2/\sqrt{10}\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{15/25}}\begin{pmatrix}-1/5\\3/5\\1/5\\2/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{15}\\3/\sqrt{15}\\1/\sqrt{15}\\2/\sqrt{15}\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_3 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{30/36}}\begin{pmatrix}1/6\\0\\5/6\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\0\\5/\sqrt{30}\\-2/\sqrt{30}\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_4 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_4'\|}\boldsymbol{u}_4' = \frac{1}{\sqrt{5/25}}\begin{pmatrix}2/5\\0\\0\\1/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\0\\0\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

で与えられる． □

問題 1 補足解説. 第 7 回講義資料 p.9 に述べたグラム・シュミットの直交化法に従って正規直交基底を求めれば良い．ここではアルゴリズムに従って計算を行ったが，計算の工夫として，例えば途中の $\boldsymbol{u}_i'$ らは正の定数倍をして分母を払って計算しても良い．問題の例だと，

$$\boldsymbol{u}_2' = \begin{pmatrix}-1/5\\3/5\\1/5\\2/5\end{pmatrix}$$

と求まるが，これを 5 倍して

$$\boldsymbol{u}_2'' = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$$

に取り替えてその先の $\boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{u}_4'$ の計算を行って良い．実際，この先の計算では $\frac{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_2')_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}_2'$ という形のものが出るが，

$$\frac{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_2')_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}_2' = \frac{(5\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{R}}}{(5\boldsymbol{u}_2', 5\boldsymbol{u}_2')_{\mathbb{R}}}5\boldsymbol{u}_2' = \frac{(\boldsymbol{u}_2'', \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}_2'', \boldsymbol{u}_2'')_{\mathbb{R}}}\boldsymbol{u}_2''$$

となる．

ちなみに，グラムシュミットの直交化法は初めの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の順番を並べ替えて始めると計算結果が変わってしまう．問題文の但し書きは，「答えを 1 つに定めるために並べ替えをしないでください」という注意であった． □

問題 2

$\mathbb{C}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix}i\\1\\-i\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ととる．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底を求めよ．ただし，ここでの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を第 7 回講義資料 p.9 のアルゴリズムの説明にあらわれる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ としてグラム・シュミットの直交化を行うこと (つまり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の順番はこのまま入れ替えずにグラム・シュミットの直交化を行う)．計算の仮定も記述すること．

問題 2 解答例. まず,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' &:= \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}_2' &:= \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{C}}}{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_1')_{\mathbb{C}}}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-i+1}{3}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-i)/3 \\ (2+i)/3 \\ (1+i)/3 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}_3' &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{C}}}{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_1')_{\mathbb{C}}}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{C}}}{(\boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_2')_{\mathbb{C}}}\boldsymbol{u}_2' \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{(5-i)/3}{12/9}\begin{pmatrix} (2-i)/3 \\ (2+i)/3 \\ (1+i)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)/4 \\ -(1+i)/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよいので，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{12/9}}\begin{pmatrix} (2-i)/3 \\ (2+i)/3 \\ (1+i)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-i)/2\sqrt{3} \\ (2+i)/2\sqrt{3} \\ (1+i)/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{u}_3 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{8/16}}\begin{pmatrix} (1+i)/4 \\ -(1+i)/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)/2\sqrt{2} \\ -(1+i)/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

で与えられる． □

問題 2 補足解説. これも第 7 回講義資料 p.9 に述べたグラム・シュミットの直交化法に従って正規直交基底を求めれば良い．エルミート内積では左側のベクトルの成分に複素共役を付けて計算しないといけないということを忘れないようにしよう． □