線形代数 II 第 8 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化する実直交行列 U を求め，A を対角化せよ．ただし，計算の仮定も記述すること．

問題 1 解答例． A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & t-4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t+1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & t-2 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t-4) \left| \begin{pmatrix} t+1 & 1 & 2 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 2 & -2 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列目に関して余因子展開}) \\
&= (t-4) \left| \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 2 \\ t+2 & t+1 & -2 \\ 0 & -2 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列を加えた}) \\
&= (t-4) \left| \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 2 \\ 0 & t & -4 \\ 0 & -2 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列を加えた}) \\
&= (t-4)(t+2) \left| \begin{pmatrix} t & -4 \\ -2 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列目に関して余因子展開}) \\
&= (t-4)(t+2)(t(t-2) - (-4)(-2)) = (t-4)(t+2)(t^2-2t-8) = (t-4)^2(t+2)^2
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 4 (重複度 2), -2 (重複度 2) である．

固有値 4 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(4I_4 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，その解の全体は，

$$V_A(4) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．これより，2 つの元からなる固有値 4 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

が取れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{R}^4$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する．まず，

$$\boldsymbol{u}_1' \coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_1')_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

次に固有値 -2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-2I_4 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，その解の全体は，

$$V_A(-2) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．これより，2 つの元からなる固有値 -2 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．$\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を $\mathbb{R}^4$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する．まず，

$$\boldsymbol{u}_3' \coloneqq \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_4' \coloneqq \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{v}_4)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{u}_3')_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{u}_4'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_4 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3\ \boldsymbol{u}_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，U は実直交行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 1 補足解説． 第 8 回講義資料 p.7 に述べた手順に基づいて実直交行列を求めれば良い．実直交行列 U の取り方は 1 通りではなく，$V_A(4)$ から 2 つの互いに直交する大きさ 1 のベクトル，$V_A(-2)$ から 2 つの互いに直交する大きさ 1 のベクトルを選んでそれらを並べて行列を作れていれば何でもよい ($U^{-1}AU$ の対角成分の並び方は固有ベクトルの並べ方に応じて変化する)． □

問題 2

$\mathbb{C}^3$ において，固有空間が

$$V_A(4) = \left\{ c\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ c \in \mathbb{C} \right\}, \quad V_A(2) = \left\{ c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle|\ c \in \mathbb{C} \right\}, \quad V_A(-4) = \left\{ c\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ c \in \mathbb{C} \right\}$$

となるような 3 次エルミート行列 A を求めよ．<u>ただし，計算の仮定も記述すること．</u>(固有空間の記号については定義 5.4 参照．)

問題 2 解答例． まず，

$$\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} = (-i)\cdot(-i) + 1\cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} = (-i)\cdot i + 1\cdot(-1) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} = i\cdot i + 1\cdot(-1) + 2 \cdot 1 = 0$$

より，$V_A(4), V_A(2), V_A(-4)$ は互いに直交する[*1]．よって，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-i)\cdot i + 1\cdot 1 + 0\cdot 0}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \in V_A(4)$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{i\cdot(-i) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in V_A(2)$$

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-i)\cdot i + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in V_A(-4)$$

[*1] この事実に気付くヒントは「3 次エルミート行列 A を求めよ」という部分である．定理 8.4 よりエルミート行列の固有空間は互いに直交する．

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は A の固有ベクトルからなる正規直交基底が得られる．よって，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，これは A を対角化するユニタリ行列で，

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

となる．この式の両辺に左から U，右から $U^{-1} = U^*$ を掛けると，

$$\begin{aligned} A &= U \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} U^* \\ &= \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3i & -2i \\ -3i & 1 & 2 \\ 2i & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる． □

問題 2 補足解説． 本問は固有空間と固有値の情報から逆に行列を求める問題であった．各固有空間から 1 つずつ $\mathbf{0}$ でないベクトルを選んできて，例えば

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は A の固有ベクトルからなる基底なので，

$$P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} i & -i & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

である．よって，この P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

として A を計算してももちろん問題ない．特に，解答例のように直交性を確認したり，ユニタリ行列を取ってきたりする必要はないのであるが，ユニタリ行列であれば $U^{-1} = U^*$ というように U^{-1} が簡単に求められるので，解答例ではユニタリ行列を取ってきた[*2]．ちなみに，解答例の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を用いて，

$$\begin{aligned} P_4 &= \boldsymbol{u}_1{}^t\overline{\boldsymbol{u}_1} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} (-i/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ 0) = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 & 0 \\ -i/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \boldsymbol{u}_2{}^t\overline{\boldsymbol{u}_2} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} (i/\sqrt{6}\ 1/\sqrt{6}\ 2/\sqrt{6}) = \begin{pmatrix} 1/6 & -i/6 & -i/3 \\ i/6 & 1/6 & 1/3 \\ i/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \\ P_{-4} &= \boldsymbol{u}_3{}^t\overline{\boldsymbol{u}_3} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} (-i/\sqrt{3}\ -1/\sqrt{3}\ 1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1/3 & -i/3 & i/3 \\ i/3 & 1/3 & -1/3 \\ -i/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[*2] もちろん講義で学んだ内容の復習という意味も込めている．

とすると，各 P_λ は固有空間 $V_A(\lambda)$ への射影子であり，

$$A = 4P_4 + 2P_2 + (-4)P_{-4}$$

が第 8 回講義資料 p.5 下部の意味での A のスペクトル分解を与える．この式の右辺を計算することで A を求めても良い． $\square$