線形代数 II 第 9 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

ここで，$\mathrm{Tr}(A)$ は A のトレースを表す．

問題 1 解答例． W は $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分空間である．
理由：O を 3 次ゼロ行列とすると，$\mathrm{Tr}(O) = 0$ なので，$O \in W$ である．
次に，任意の 2 元 $A, B \in W$ をとると，

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0 + 0 = 0.$$

よって，$A + B \in W$ である．
さらに，任意の $c \in \mathbb{C}, A \in W$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A) = c \cdot 0 = 0.$$

よって，$cA \in W$ である．
以上より，W は $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分空間である． □

問題 1 補足解説． 部分空間であるかどうかを確かめるためには，定義 9.3 の (s1)，(s2)，(s3) を全て満たすかどうかを順にチェックすれば良い．なお，n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ の**トレース (trace)** の定義は，

$$\mathrm{Tr}(A) \coloneqq a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (\text{対角成分の和})$$

であった．定義から直接計算で示せるトレースの以下の性質も合わせて思い出しておこう．

任意の n 次正方行列 A, B と $c \in \mathbb{K}$ に対し，

(1) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
(2) $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A)$.
(3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

なお，問題 1 の証明では n 次正方行列で成り立つ上の性質しか用いていないので，一般の $n \geq 1$ に対しても同じ証明で

$$W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

が $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ の部分空間であることが示される． □

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2

$\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \mid |A| = 0\}$$

ここで，$|A|$ は A の行列式を表す．

問題 2 解答例． W は $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の部分空間ではない．

<u>理由：</u>

$$A_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$|A_1| = |A_2| = 0$ より，$A_1, A_2 \in W$．一方，

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

より，$|A_1+A_2| = |I_3| = 1 \neq 0$．よって，$A_1+A_2 \notin W$．これより，$W$ は和で閉じておらず，W は $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の部分空間ではない．□

問題 2 補足解説． 本問の W は和で閉じていない集合であるのでそれを指摘すれば良い．なお，このように条件を満たさないことを言う際にはなるべく具体的な反例を構成するようにしよう．ちなみに，一般の $n \geq 2$ に対しても，

$$W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid |A| = 0\}$$

とすると，これは $n = 3$ における上の証明と同じ方法で $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分空間でないことが示される．具体的には A_1, A_2 として，

$$A_1 \coloneqq \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \coloneqq \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{\Large 0} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いれば良い．なお，n 次ゼロ行列 O は $|O| = 0$ を満たすので $O \in W$ であり，$c \in \mathbb{K}, A \in W$ のとき，行列式の多重線形性より，

$$|cA| = c^n|A| = 0$$

となるので，$cA \in W$ である．よって，W は部分空間の定義条件のうち (s2) のみを満たさない $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分集合である．□

問題 3

$\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \;\middle|\; A \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を固有ベクトルに持つ} \right\}.$$

問題 3 解答例． W は $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の部分空間である．

<u>理由：</u>O を 3 次ゼロ行列とすると，

$$O \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は O の固有値 0 の固有ベクトルである．よって，$O \in W$.

次に，任意の 2 元 $A, B \in W$ とり，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が A, B のそれぞれ固有値 λ, μ の固有ベクトルであるとする．このとき，

$$(A+B)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (\lambda+\mu)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

よって，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は $A+B$ の固有値 $\lambda+\mu$ の固有ベクトルであるので，$A+B \in W$ である．さらに，$c \in \mathbb{C}$ を任意に取ると，

$$cA\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = c\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

となるので，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は cA の固有値 $c\lambda$ の固有ベクトルである．よって，$cA \in W$ である．

以上より，W は $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分空間である． □

問題 3 補足解説． 一般の $n \geq 1$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対しても，

$$W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) |\ A \text{ は } \boldsymbol{v} \text{ を固有ベクトルに持つ }\}$$

とすると，これは上の証明と同じ方法で $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分空間であることが示される． □

問題 4

$\mathbb{R}[x]$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathbb{R}[x]$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) \geq 0\}$$

問題 4 解答例． W は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間ではない．
理由：$f(x) = x+1 \in \mathbb{R}[x]$ とすると，$f(0) = 0+1 = 1 > 0$ より，$f(x) \in W$．一方，$-1 \in \mathbb{R}$ に対し，

$$(-1)\cdot f(x) = -(x+1)$$

より，$(-1)\cdot f(0) = -1 < 0$．よって，$(-1)\cdot f(x) \notin W$．これより，W はスカラー倍で閉じておらず，W は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間ではない． □

問題 4 補足解説． 本問の W はスカラー倍で閉じていない集合であるのでそれを指摘すれば良い．なお，ゼロ多項式 $f(x) = 0$ は $f(0) = 0$ を満たすので $0 \in W$ であり，$g_1(x), g_2(x) \in W$ のとき，

$$g_1(0) + g_2(0) \geq 0$$

となるので，$g_1(x) + g_2(x) \in W$ である．よって，W は部分空間の定義条件のうち (s3) のみを満たさない $\mathbb{R}[x]$ の部分集合である． □

問題 5

$\mathbb{R}[x]$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathbb{R}[x]$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

問題 5 解答例. W は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間である.
理由 : $f(x) = 0 \in \mathbb{R}[x]$ とすると，$f(0) = f(1) = 0$ となるので，$f(x) = 0 \in W$ である.
次に，任意の 2 元 $f(x), g(x) \in W$ をとると，

$$f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \quad \text{かつ} \quad f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

となるので，$f(x) + g(x) \in W$ である.
さらに，任意の $c \in \mathbb{R}, f(x) \in W$ に対し，

$$cf(0) = c \cdot 0 = 0 \quad \text{かつ} \quad cf(1) = c \cdot 0 = 0$$

となるので，$cf(x) \in W$ である.
以上より，W は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間である. □

問題 5 補足解説. $a \in \mathbb{R}$ に対し，

$$U_a \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(a) = 0\}$$

とおくと，本問と同様の証明でこれは $\mathbb{R}[x]$ の部分空間であることがわかる．このとき，本問の W は

$$W = U_0 \cap U_1$$

と表せる．命題 9.5 より，部分空間の共通部分は再び部分空間となったので，このことからも W が $\mathbb{R}[x]$ の部分空間となることがわかる. □