# 線形代数 II 第 10 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

**問題 1**

$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

が一次従属となるような $a$ の値を求め，半角数字で入力せよ．

**問題 1 解答例.** 一次従属性の定義より，$c_1, c_2, c_3$ に関する連立一次方程式

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ つまり，} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解を持つような $a$ の値を求めれば良い．よって，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} < 3$$

となるような $a$ の値を求めれば良い．ここで，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3 行に加える}]{\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍,} (-1) \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 7 & 1-2a \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行の } (-2) \text{ 倍を}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 1,3 行に加える}]{\text{第 2 行の 2 倍,} -3 \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4-a \end{pmatrix}$$

となるので，この行列のランクが 3 より小さくなるのは $4 - a = 0$，すなわち $a = 4$ のとき． □

**問題 1 補足解説.** 一次従属性の定義に従って $a$ の値を求めれば良い．$\mathbb{K}^n$ の部分集合に対する一次独立・従属性の判定については，第 4 回講義資料定理 4.4 も復習しておくこと． □

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

**問題 2**

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\1&1&1&1&3\\1&1&1&2&6\\0&1&-2&3&10\end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^5$ の部分空間

$$W_A \coloneqq \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

の基底の 1 つとして，

$$\left\{\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\\boxed{\text{イ}}\\1\\\boxed{\text{ウ}}\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boxed{\text{エ}}\\\boxed{\text{オ}}\\0\\\boxed{\text{カ}}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

が取れる．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{カ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

**問題 2 解答例．** $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ に関する連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\1&1&1&1&3\\1&1&1&2&6\\0&1&-2&3&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

の解全体の $\mathbb{R}^5$ の部分集合が $W_A$ である．ここで $A$ を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となるので，上の連立一次方程式は

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}，\text{すなわち，}\begin{cases}x_1=-3x_3+x_5\\x_2=2x_3-x_5\\x_4=-3x_5\end{cases}$$

と同値であるから，

$$W_A=\left\{c_1\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\;\middle|\; c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

となる．$B=\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$ とする．いま，$c_1,c_2$ に関する連立一次方程式

$$c_1\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c_1+c_2\\2c_1-c_2\\c_1\\-3c_2\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を考えると，第 3，第 5 成分に着目することでその解が $c_1=c_2=0$ のみであることがわかるので，$B$ は一次独立な集合である．以上より，$B$ は $W_A$ を生成する一次独立な集合なので，$B$ は $W_A$ の基底である ($B$ は解答欄の穴埋めに合う形をしているのでこの通りに数字を入れれば良い)． □

**問題 2 補足解説.** 一般に $m \times n$ 行列 $A$ に対して，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A (=: m)$ であった．よって，この連立一次方程式の解の全体 $W_A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は，ある $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{K}^n$ を用いて，

$$W_A = \{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m\}$$

と書ける．このとき，第 5 回講義資料定理 5.7 より $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m\}$ は一次独立でもあるので，$\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m\}$ は $\mathbb{K}^n$ の部分空間 $W_A$ の基底となる．連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体は解答例のように係数行列 $A$ を行基本変形で簡約化することでベクトル表示で求めることができたが，ここで求めていたベクトルの組は解全体の成す空間 $W_A$ の基底に他ならなかったのである．

ちなみに一般にベクトル空間の基底の取り方は無限に存在し得るが，本問の場合，解答欄の穴埋めに合う形のものは一通りである．別の基底を求めてしまった場合も，解答欄に合う形の元をそれらの一次結合として作って解答すれば正しい答えとなる． □

**問題 3**

$V$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\} \subset V$ を $V$ の基底とする．このとき，$V$ の部分集合

$$B = \{\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2\}$$

が $V$ の基底であるかどうかについて正しいものを選択せよ．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の取り方に依らずいつでも基底である．
(2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の取り方に依らずいつでも基底でない．
(3) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の取り方に依って基底であるときとそうでないときがある．

**問題 3 解答例.** (1) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ の取り方に依らずいつでも基底である．
理由：$B$ が一次独立であることと $B$ が $V$ を生成することを順に示せば良い．
一次独立性：$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が

$$c_1(\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2) + c_2(-2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{0}$$

を満たしたとする．左辺は

$$(c_1 - 2c_2)\boldsymbol{b}_1 + (2c_1 + c_2)\boldsymbol{b}_2$$

となるが，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は一次独立なので，このとき

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

この連立一次方程式の解は $c_1 = c_2 = 0$ のみであるから，結局 $B$ が一次独立であることがわかる．
$B$ が $V$ を生成すること：任意の $V$ の元 $\boldsymbol{b}$ が $B$ の元の一次結合で書けることを示せば良い．

$$\boldsymbol{b}'_1 := \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{b}'_2 := -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

とおくと，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{5}(\boldsymbol{b}'_1 - 2\boldsymbol{b}'_2), \qquad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{5}(2\boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}'_2)$$

となる．いま，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $V$ を生成するので，任意の $\boldsymbol{v}$ に対してある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 = \frac{c_1}{5}(\boldsymbol{b}'_1 - 2\boldsymbol{b}'_2) + \frac{c_2}{5}(2\boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}'_2) = \left(\frac{c_1}{5} + \frac{2c_2}{5}\right)\boldsymbol{b}'_1 + \left(\frac{-2c_1}{5} + \frac{c_2}{5}\right)\boldsymbol{b}'_2$$

となる．これは，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2$ の一次結合で書けることを示しているので，$B$ が $V$ を生成することも示された． □

**問題 3 補足解説.** 解答例のように

$$\boldsymbol{b}_1' := \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{b}_2' := -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

とおくと，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2'\}$ の関係は行列の積の公式にあてはめて，

$$(\boldsymbol{b}_1' \ \boldsymbol{b}_2') = (\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

というように表される．なお，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等は一般のベクトル空間 $V$ の元であって数ではないので，これらを成分に持つ行列というのは少し妙な気がするかもしれないが，とにかく $\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2'$ と $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の関係を行列の積をまねて形式的に表したものだと考えれば良い．このとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，上式の右からこの行列を掛けて，

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{b}_1' \ \boldsymbol{b}_2') \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

という関係も成り立つ*1．解答例の $B$ が $V$ を生成することの証明ではこの関係を用いていた．

上記のような変換は基底の変換と呼ばれ，上の $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2'\}$ **への基底の変換行列**と呼ばれる．このことは先の講義でも勉強する．一般に，$\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ がベクトル空間 $V$ の基底であるとき，$n$ 次<u>正則</u>行列 $P$ を用いて，

$$(\boldsymbol{b}_1' \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n') = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)P$$

とすると，$\{\boldsymbol{b}_1', \dots, \boldsymbol{b}_n'\}$ も再び $V$ の基底となる． □

**問題 4**

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}[x]$ の部分集合

$$B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots\} = \left\{ \sum_{j=0,\dots,n} x^j \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

が $\mathbb{C}[x]$ の基底であるかどうかを判定せよ．

**問題 4 解答例.** 基底である

<u>理由</u>：$B$ が一次独立であることと $B$ が $\mathbb{C}[x]$ を生成することを順に示せば良い．以下では，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$f_n(x) := \sum_{j=0,\dots,n} x^j = 1 + x + \cdots + x^n$$

と書く．

*1 一般に $n$ 次正則行列 $P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対して，その逆行列を $P^{-1} = (p^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ と書いたとき，変数 $x_1, \dots, x_n$ と $y_1, \dots, y_n$ が

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} y_i, \ j = 1, \dots, n, \text{ すなわち，} (x_1 \ \cdots \ x_n) = (y_1 \ \cdots \ y_n)P$$

という関係にあるのであれば，

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} p^{ij} x_i, \ j = 1, \dots, n, \text{ すなわち，} (y_1 \ \cdots \ y_n) = (x_1 \ \cdots \ x_n)P^{-1}$$

という関係も成り立つ．この書き換えにあたってはスカラー倍と和を取る操作しか用いていないので，この “変数” の部分にベクトル空間の元が入っていてもこの変換は問題なく行えるのである．

一次独立性：$(c_{f_n(x)})_{f_n(x)\in B}=(c_n)_{f_n(x)\in B}\in\mathbb{C}^{B,\mathrm{fin}}$ (見やすさのため $(c_{f_n(x)})$ を単に $c_n$ と書く) が，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} c_n f_n(x)=0$$

を満たしたと仮定する．ここで $(c_n)_{f_n(x)\in B}\neq(0)_{f_n(x)\in B}$ であると仮定して，矛盾を導く．$\mathbb{C}^{B,\mathrm{fin}}$ の定義より，このとき $c_n\neq 0$ となる $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は有限個なので，$c_n\neq 0$ となる中で最大の $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し，それを $n_0$ とおく．このとき，

$$\sum_{n=0,1,\ldots,n_0-1} c_n f_n(x)+c_{n_0}f_{n_0}(x)=0$$

であるので，

$$f_{n_0}(x)=-\frac{1}{c_{n_0}}\left(\sum_{n=0,1,\ldots,n_0-1} c_n f_n(x)\right)$$

である．ここで $f_n(x)$ は $n$ 次多項式であるから，上の式の右辺は高々 $n_0-1$ 次多項式である．一方，左辺は $n_0$ 次式であるからこれは矛盾である．よって，$(c_n)_{f_n(x)\in B}=(0)_{f_n(x)\in B}$．これより，$B$ は一次独立であることが示された．

$B$ が $V$ を生成すること：任意の $\mathbb{C}[x]$ の元 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=\sum_{k=0}^n a_kx^k$ が $B$ の元の一次結合で書けることを示せば良い．いま，任意の $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$x^k=f_k(x)-f_{k-1}(x)$$

であるので，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_kx^k&=a_0f_0(x)+\sum_{k=1}^n a_k(f_k(x)-f_{k-1}(x))\\&=a_0f_0(x)+\sum_{k=1}^n a_kf_k(x)-\sum_{k=1}^n a_kf_{k-1}(x)\\&=\sum_{k=0}^n a_kf_k(x)-\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}f_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})f_k(x)+a_nf_n(x)\end{aligned}$$

となる．これは，任意の $\sum_{k=0}^n a_kx^k\in\mathbb{C}[x]$ が $B$ の元の一次結合で書けることを示しているので，$B$ が $\mathbb{C}[x]$ を生成することも示された． □

**問題 4 補足解説.** 無限個の元からなる $\mathbb{C}[x]$ の部分集合であるが，基底の定義条件である一次独立性と生成性を順にチェックすれば良い． □