線形代数 II 第 11 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の間の以下の写像が線形写像であるかどうかを判定せよ．

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \left| \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

ここで，3 次正方行列 A に対して $|A|$ は A の行列式を表す．

問題 1 解答例． 線形写像である．

<u>理由：</u> 任意の $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) &= \left| \begin{pmatrix} a+a' & 1 & 2 \\ b+b' & 0 & 1 \\ c+c' & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} a' & 1 & 2 \\ b' & 0 & 1 \\ c' & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{行列式の多重線形性より}) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}\right) &= \left| \begin{pmatrix} \alpha a & 1 & 2 \\ \alpha b & 0 & 1 \\ \alpha c & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \alpha \left| \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{行列式の多重線形性より}) \\
&= \alpha\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

となるので，φ は線形写像である． □

問題 1 補足解説． 与えられた写像が線形写像であることを示すためには，定義 11.1 の性質 (1), (2) を順に確認すれば良い．

行列式の多重線形性より，より一般に任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in \{1, \dots, n\}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{K}^n$ に対して，

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ \boldsymbol{x} \mapsto |(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{i-1}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{v}_{i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)|$$

という写像は線形写像である．問題 1 の写像は $n = 3, i = 1, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合に対応する．上のような "各列に着目すると線形性がある" という性質がまさに行列式の多重線形性という言葉の由来である． □

* *e-mail*： hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の以下の写像が線形写像であるかどうかを判定せよ．

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & a \neq 0 \text{ のとき} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & a = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

問題 2 解答例． 線形写像ではない．

理由：

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

よって，φ は線形写像でない． □

問題 2 補足解説． φ は，

$$\begin{aligned} \varphi\left(c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}\right) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & a \neq 0 \text{ かつ } c \neq 0 \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & a \neq 0 \text{ かつ } c = 0 \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & a = 0 \text{ のとき}, \end{cases} \\ &= c\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

を満たすので，線形写像の定義 11.1 の条件 (2) は満たすが (1) は満たさない写像となっている． □

問題 3

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の以下の写像が線形写像であるかどうかを判定せよ．

$$\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ f(x) \mapsto xf(x) + 2f(-x).$$

例えば，

$$\begin{aligned} \varphi(1 + x + x^2) &= x(1 + x + x^2) + 2(1 + (-x) + (-x)^2) \\ &= x + x^2 + x^3 + 2 - 2x + 2x^2 \\ &= 2 - x + 3x^2 + x^3 \end{aligned}$$

というようになる．

問題 3 解答例． 線形写像である．

理由：任意の $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], \alpha \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(f(x) + g(x)) &= x(f(x) + g(x)) + 2(f(-x) + g(-x)) \\ &= (xf(x) + 2f(-x)) + (xg(x) + 2g(-x)) \\ &= \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\alpha f(x)) &= x(\alpha f(x)) + 2(\alpha f(-x)) \\
&= \alpha(xf(x) + 2f(-x)) \\
&= \alpha\varphi(f(x))
\end{aligned}
$$

となるので，φ は線形写像である． □

問題 3 補足解説． 一般に，任意の多項式 $c(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対し，

$$
\begin{aligned}
m_{c(x)} &\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto c(x)f(x) \\
s_{c(x)} &\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto f(c(x))
\end{aligned}
$$

は線形写像である (線形写像の定義 11.1 の性質 (1)，(2) を満たすことは各自確認せよ)．このとき，問題 3 の写像 φ は命題 11.3 で定義した線形写像の和とスカラー倍を用いて

$$
\varphi = m_x + 2s_{-x}
$$

と表される．よって，命題 11.3 より φ は線形写像である． □

問題 4

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の以下の線形写像 φ を考える．

$$
\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ f(x) \mapsto xf'(x).
$$

ここで，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ を x に関して微分して得られる多項式を表す．このとき，像 $\operatorname{Im}\varphi$ として適切なものを選択せよ．

(1) $\mathbb{R}[x]$
(2) $\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\}$
(3) $\{r \in \mathbb{R}[x] \mid r \in \mathbb{R}\}$
(4) $\{nx^n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$

問題 4 解答例． (2)
理由：以下のように計算ができる．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\varphi &= \{\varphi(f(x)) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x]\} \\
&= \{\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a'_1x + a'_2x^2 + \cdots + a'_nx^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x) \text{ は定数項が } 0\} \\
&= \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\}.
\end{aligned}
$$

□

問題 4 補足解説． 微分写像 $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f(x) \mapsto f'(x)$ は線形写像だったので (第 11 回講義資料例 3)，問題 3 補足解説で導入した記号を用いると問題 4 の写像 φ は，

$$
\varphi = m_x \circ \frac{d}{dx}
$$

となる．よって，命題 11.3 (3) より，この φ も確かに線形写像である．ちなみに，

$$
\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n
$$

であることに注意すると，

$$\varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = 0 \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

となることがわかる．よって，

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \varphi(f(x)) = 0\} = \{r \in \mathbb{R}[x] \mid r \in \mathbb{R}\}$$

となる． □

問題 5

以下の主張の正誤を判定せよ．

『$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ はある $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$$

と書けるもののみである．』

問題 5 解答例． 正しい． □

問題 5 補足解説． 以下のように考えれば良い．$\mathbb{R}^2$ の基底として，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が取れるので，命題 11.4 より任意の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は $f(\boldsymbol{e}_1)$ と $f(\boldsymbol{e}_2)$ の値をから一意的に決まっている．実際，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

であるとすると，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \mapsto x\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$$

という形になるしか無い．よって，問題文の主張は正しい．

ちなみに，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix}$$

は

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

と置くと，

$$f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

というもの (第 11 回講義資料例 1) に一致する．これより，実は任意の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像はある 3×2 行列 A を用いて f_A の形で表されるものになることがわかる．実は同様の議論で，一般に任意の $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線形写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は，ある $m \times n$ 行列 A を用いて $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ と書けるものになることが示される．この事実は今後の講義でも扱う重要な事実である． □