線形代数 II 第 12 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{C}^7$ の部分空間

$$W_A \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^7 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

の次元 $\dim_{\mathbb{C}} W_A$ を求め，その値を半角数字で入力せよ．

問題 1 解答例. W_A は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{C}^7$ の部分空間である．係数行列 A を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 \\ x_2 = 2x_5 + 2x_7 \\ x_4 = -3x_5 + x_6 - 2x_7 \end{cases}$$

という連立一次方程式と同値なので，

$$\begin{aligned} W_A &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

となる．ここで，ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ に対し，

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 \\ 2c_2 + 2c_4 \\ c_1 \\ -3c_2 + c_3 - 2c_4 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるとき $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ となるので，$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は一次独立である．

以上より，B は W_A の基底であるので，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = |B| = 4.$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

□

問題 1 補足解説. 一般に $m \times n$ 行列 A に対し，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$ となるので，ある $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A} \in \mathbb{K}^n$ が存在して，

$$\begin{aligned} W_A \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} &= \{c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{n-\operatorname{rank} A}\boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A} \mid c_1, c_2, \dots, c_{n-\operatorname{rank} A} \in \mathbb{K}\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A}\} \end{aligned}$$

となる．ここで，第 5 回講義講義資料定理 5.7 より，このとき $B = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A}\}$ は自動的に一次独立となる．よって，B は W_A を生成する一次独立な W_A の部分集合となるので，W_A の基底である．よって，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = n - \operatorname{rank} A$$

である．この結果を用いれば，問題 1 も $\operatorname{rank} A = 3$ であることから，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = 7 - 3 = 4$$

というように求められる． □

問題 2

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ の以下の部分空間 W の $\mathbb{C}$ 上の次元 $\dim_{\mathbb{C}} W$ を求め，その値を半角数字で入力せよ．

$$W \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = A\}$$

ここで，${}^tA$ は A の転置を表す．

問題 2 解答例.

$$\begin{aligned} W &= \{A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = A\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C}) \;\middle|\; a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

となるので，

$$\widetilde{E}_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{E}_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{E}_{13} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{E}_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{E}_{23} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{E}_{33} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{aligned} W &= \{a_{11}\widetilde{E}_{11} + a_{12}\widetilde{E}_{12} + a_{13}\widetilde{E}_{13} + a_{22}\widetilde{E}_{22} + a_{23}\widetilde{E}_{23} + a_{33}\widetilde{E}_{33} \mid a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{C}\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\widetilde{E}_{11}, \widetilde{E}_{12}, \widetilde{E}_{13}, \widetilde{E}_{22}, \widetilde{E}_{23}, \widetilde{E}_{33}\} \end{aligned}$$

となる．ここで，ある $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{C}$ に対し，

$$a_{11}\widetilde{E}_{11} + a_{12}\widetilde{E}_{12} + a_{13}\widetilde{E}_{13} + a_{22}\widetilde{E}_{22} + a_{23}\widetilde{E}_{23} + a_{33}\widetilde{E}_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$ となる．よって，$B = \{\widetilde{E}_{11}, \widetilde{E}_{12}, \widetilde{E}_{13}, \widetilde{E}_{22}, \widetilde{E}_{23}, \widetilde{E}_{33}\}$ は W を生成する一次独立な W の部分集合となるので，W の基底である．よって，

$$\dim_{\mathbb{C}} W = |B| = 6.$$

□

問題 2 補足解説. 一般に，正の整数 n に対して，

$$W := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid {}^t A = A\}$$

とすると，W は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分空間である．W は n 次対称行列全体のなす部分空間であることに注意しよう．ここで，E_{ij} を (i,j) 成分が 1，その他の成分が全て 0 の n 次正方行列としたとき，$1 \leq i \leq j \leq n$ に対し，

$$\widetilde{E}_{ij} = \begin{cases} E_{ii} & i = j \text{ のとき}, \\ E_{ij} + E_{ji} & i < j \text{ のとき}, \end{cases}$$

とすれば，本問と同様の計算で，$\{\widetilde{E}_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ が W の基底となることがわかる．よって，

$$\dim W = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

問題 3

以下の文章の正誤を判定せよ．
『V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，W を $W \neq V$ なる V の部分空間とする．このとき，必ず $\dim_{\mathbb{R}} W < \dim_{\mathbb{R}} V$ である．』

問題 3 解答例. 正しい．
理由：B_W を W の基底とすると，これは W の一次独立な部分集合であるので，V の一次独立な部分集合でもある．ここで，定理 12.6 (1) より線形同型写像 $f\colon V \to \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ が存在するが，命題 12.4 より，$f(B_W)$ は $\mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ の一次独立な部分集合である．さらに，$\mathrm{span}_{\mathbb{R}} B_W = W \neq V$ であるから，B_W は V を生成はしていないので，命題 12.4 より $f(B_W)$ は $\mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ を生成はしておらず，基底ではない．これより，定理 5.1 (1)，命題 10.7 より，$|f(B_W)| < \dim_{\mathbb{R}} V$．これより，$\dim_{\mathbb{R}} W = |B_W| = |f(B_W)| < \dim_{\mathbb{R}} V$ である． □

問題 3 補足解説. ここでの議論より，一般に $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V とその部分空間 W に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V$$

であり，等号成立の必要十分条件が $W = V$ であるということがわかる．これは直感的にも非常に自然な結果だろう．なお，V が無限次元であれば，$\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V (= \infty)$ でも，$W \neq V$ となることはあり得る．例えば，$\mathbb{K}[x]$ の部分空間 $W = \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(0) = 0\}$ を考えると，これは定数項が 0 の多項式全体なので，

$$B = \{x, x^2, \dots\} = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

を基底に持つ．よって，$\mathbb{K}[x] \neq W$ であるが，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \dim_{\mathbb{K}} W = \infty$ である[*1]. □

問題 4

$\mathbb{R}^4$ と $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ はいずれも $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として 4 次元なので，同型である．ここで，以下の文章の正誤を判定せよ．
『$\mathbb{R}^4$ と $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として同型なので，任意の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ は全単射である．』

[*1] 次元を基底の濃度で定義したとしても，この場合 $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \dim_{\mathbb{K}} W$ である

問題 4 解答例. 間違い.

<u>理由：</u> 例えば，$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ を，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対し，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる写像とすると，これは線形写像である．一方，$\mathrm{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ なので，これは全射ではなく，特に全単射ではない (なお，$\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}^4$ なので単射でもない). $\square$

問題 4 補足解説. $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V, W が同型であることの定義は全単射線形写像 $f\colon V \to W$ **が少なくとも 1 つは存在する**ということなので，$V \simeq W$ のとき，任意の線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるというわけではないことに注意しよう．特に解答例に書いた例のように，一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V から W への写像 $f\colon V \to W$ を，

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \text{ に対して，} f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

で定義すると，これは線形写像となる．なぜなら，任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}'), \quad f(c\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} = c \cdot \boldsymbol{0} = cf(\boldsymbol{v})$$

となるためである．なお，この線形写像はベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ における零元である (第 11 回講義資料注意 1 参照). $\square$