線形代数 II 第 13 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の (1), (2), (3) が，$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ が全射であるということを導くかどうかそれぞれ判定せよ．

(1) $\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W$.
(2) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$.
(3) $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$.

問題 1 解答例.

(1) f が全射であることを導かない．

理由：V, W が $\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W \geq 1$ を満たすとする．このとき，写像 $f\colon V \to W$ を

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \text{ に対して，} f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$$

で定義すると，これは線形写像となる．なぜなら，任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}'), \quad f(c\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0} = cf(\boldsymbol{v})$$

となるためである．しかし，このとき $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\} \neq W$ ($\dim_{\mathbb{R}} W \geq 1 > 0$ なので) より，f は全射ではない．よって，$\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W$ は $f\colon V \to W$ の全射性を導かない．

(2) f が全射であることを導く．

理由：いま，

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f &= \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f \quad (\text{次元定理より}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} V - (\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W) \quad (\text{仮定より}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} W \end{aligned}$$

となる．$\operatorname{Im} f$ は W の部分空間であったので，$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{R}} W$ となるとき $\operatorname{Im} f = W$ である (第 12 回本レポート課題問題 3 参照)．よって，このとき f は全射となる．

(3) f が全射であることを導かない．

理由：(1) と同様である．V, W が $\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W = 1$ を満たすとする．このとき，写像 $f\colon V \to W$ を

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \text{ に対して，} f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$$

で定義すると，これは線形写像となり，しかも $\operatorname{Ker} f = V \neq \{\mathbf{0}\}$ を満たす ($\dim_{\mathbb{R}} V \geq 1 > 0$ なので)．しかし，このとき $\operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\} \neq W$ ($\dim_{\mathbb{R}} W = 1 \neq 0$ なので) より，f は全射ではない．よって，「$\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$」は $f\colon V \to W$ の全射性を導かない． □

問題 1 補足解説. 講義資料系 13.4 で

$$\text{線形写像 } f\colon V \to W \text{ が全射} \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W$$

は正しいことを証明したが，逆は成り立たないことに注意しよう．(1) の説明がその反例の説明になっている．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(3) は問題としては意味を持つのでそのまま採点を行うが，私 (大矢) の意図からすると出題ミスであった．実際 (1) と全く同じ議論で「f が全射であることを導かない」ということが証明できる ($\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\}$ は f が単射でないことと同値であるが，「単射でないこと」は「全射であること」を導かない，すなわち全射でも単射でもない線形写像が存在するということは頭においておこう)．本当に出題したかった条件は以下である．力試しで考えてみてほしい．

(3)' $\mathrm{Ker}\, f \neq V$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$.

実はこの条件 (3)' は f が全射であることを導く．理由は以下の通りである．
理由： $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$ のとき，次元の定義から 1 つの元からなる W の基底 $\{\boldsymbol{w}\}$ が存在する．このとき，

$$W = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{w}\} = \{c\boldsymbol{w} \mid c \in \mathbb{R}\} \tag{$*$}$$

となる．ここで，$\mathrm{Ker}\, f \neq V$ のとき，ある $\boldsymbol{v} \in V$ が存在して，$f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$ となる．このとき $(*)$ より，ある $0 \neq c_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$f(\boldsymbol{v}) = c_0\boldsymbol{w}$．すると，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(cc_0^{-1}\boldsymbol{v}) = cc_0^{-1}f(\boldsymbol{v}) = cc_0^{-1}c_0\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{w}$$

となるので，$(*)$ より $\mathrm{Im}\, f = W$．よって，f は全射となる．
別解 (次元定理を利用)：$\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間なので，$\mathrm{Ker}\, f \neq V$ のとき，$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f < \dim_{\mathbb{R}} V$ (第 12 回本レポート課題問題 3 参照)．また，$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間なので，同様に $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f \leq \dim_{\mathbb{R}} W = 1$(等号成立は $\mathrm{Im}\, f = W$ のとき)．よって，このとき次元定理より，

$$1 \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f \geq 1.$$

これより，$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f = 1 = \dim_{\mathbb{R}} W$ となる．よって，$\mathrm{Im}\, f = W$ となり，f は全射となる． □

問題 2

以下の (1), (2), (3) が，$\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ が全射でないということを導くかどうかそれぞれ判定せよ．

(1) $\dim_{\mathbb{R}} V < \dim_{\mathbb{R}} W$.
(2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f > \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$.
(3) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$.

問題 2 解答例.

(1) f が全射でないことを導く．
理由：f が全射であるとすると，系 13.4 (1) より，$\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W$ となるはずである．よって，$\dim_{\mathbb{R}} V < \dim_{\mathbb{R}} W$ であるとき，f は全射ではない．
(2) f が全射でないことを導く．
理由：いま，

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f &= \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, f \quad (\text{次元定理より}) \\
&< \dim_{\mathbb{R}} V - (\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W) \quad (\text{仮定より}) \\
&= \dim_{\mathbb{R}} W
\end{aligned}$$

となる．f が全射であるなら，$\mathrm{Im}\, f = W$ であるから $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\, f = \dim_{\mathbb{R}} W$ となるはずなので，このとき f は全射ではない．
(3) f が全射でないことを導かない．
理由：例えば，

$$f_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x$$

という写像を考えると，これは線形写像である．さらに，$f_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}(x)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を満たすとき $x=0$ なので，$\mathrm{Ker}\, f_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}=\{0\}$．しかし，

$$\mathrm{Im}\, f_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ x\in\mathbb{R}\right\}\neq\mathbb{R}^2$$

より，$f_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}$ は全射ではない，これより，$\mathrm{Ker}\, f=\{\mathbf{0}\}$ は全射性を導かないことがわかる． □

問題 2 補足解説． 問題 1 (1) で見たように，定義域と終域の次元比較だけで全射であることを示すのは一般にはできないが，問題 2 (1) の解答で説明したように全射でないことの証明はできることがある．これは，

$$\text{線形写像 } f\colon V\to W \text{ が全射} \quad\Rightarrow\quad \dim_{\mathbb{R}} V\geq\dim_{\mathbb{R}} W$$

の対偶が

$$\dim_{\mathbb{R}} V<\dim_{\mathbb{R}} W \quad\Rightarrow\quad \text{線形写像 } f\colon V\to W \text{ が全射でない}$$

であるためである．次元が小さいベクトル空間から大きいベクトル空間への全射線形写像は存在しないのである．

(3) について，$\mathrm{Ker}\, f=\{\mathbf{0}\}$ のとき f は単射である．このとき，系 13.2 より $\dim_{\mathbb{R}} V=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}\, f$ であるので，$\dim_{\mathbb{R}} V<\dim_{\mathbb{R}} W$ であれば $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}\, f\neq\dim_{\mathbb{R}} W$ となって，特に $\mathrm{Im}\, f\neq W$ である．よって，一般にこの状況で f は全射ではない． □

問題 3

U,V,W を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，

$$B_U=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}, B_V=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}, B_W=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$$

をそれぞれ U,V,W の基底とする．$f\colon U\to V, g\colon V\to W$ が線形写像であり，基底 B_U,B_V に関する f の表現行列が

$$A(f;B_U,B_V)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\2&3\end{pmatrix},$$

基底 B_V,B_W に関する g の表現行列が

$$A(g;B_V,B_W)=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&-2&0\end{pmatrix}$$

であるとする．このとき，

$$(g\circ f)(3\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)=\boxed{\text{ア}}\boldsymbol{w}_1+\boxed{\text{イ}}\boldsymbol{w}_2$$

である．$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 3 解答例． 基底 B_U,B_W に関する $g\circ f$ の表現行列は

$$A(g\circ f;B_U,B_W)=A(g;B_V,B_W)A(f;B_U,B_V)=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&11\\2&-6\end{pmatrix}$$

なので，表現行列の定義より，

$$(g\circ f)(\boldsymbol{u}_1)=6\boldsymbol{w}_1+2\boldsymbol{w}_2,\qquad (g\circ f)(\boldsymbol{u}_2)=11\boldsymbol{w}_1-6\boldsymbol{w}_2.$$

よって，$g\circ f$ の線形性より，

$$(g\circ f)(3\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)=3(g\circ f)(\boldsymbol{u}_1)-(g\circ f)(\boldsymbol{u}_2)=3(6\boldsymbol{w}_1+2\boldsymbol{w}_2)-(11\boldsymbol{w}_1-6\boldsymbol{w}_2)=7\boldsymbol{w}_1+12\boldsymbol{w}_2.$$

□

問題 3 補足解説. 表現行列の定義より，$f(\boldsymbol{u}_i)$ $(i=1,2)$，$g(\boldsymbol{v}_j)$ $(j=1,2,3)$ は全て与えられた基底の元の一次結合として書けるので，まず $f(3\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)$ を B_V の元の一次結合で書いた後，それを g で送った先 $g(f(3\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2))$ を計算しても良い．しかし，解答例では命題 13.7 (3) を用いて $A(g\circ f;B_U,B_W)$ を求めてしまうという方法を採用した．どちらの方法の方が計算が早いかについては，表現行列のサイズ等の状況によって変わってくるだろう． □

問題 4

線形写像 $F\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3}\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ を

$$f(x)\mapsto \begin{pmatrix} f(-2) & f'(2)\\ f(-1) & f'(1)\end{pmatrix}$$

で定める．ここで，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ を x に関して 1 階微分した多項式を表す．このとき，$\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ の基底

$$B=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$$

と，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底

$$B'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

に関する F の表現行列は

$$A(F;B,B')=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}&\boxed{\text{イ}}&\boxed{\text{ウ}}&\boxed{\text{エ}}\\ \boxed{\text{オ}}&\boxed{\text{カ}}&\boxed{\text{キ}}&\boxed{\text{ク}}\\ \boxed{\text{ケ}}&\boxed{\text{コ}}&\boxed{\text{サ}}&\boxed{\text{シ}}\\ \boxed{\text{ス}}&\boxed{\text{セ}}&\boxed{\text{ソ}}&\boxed{\text{タ}}\end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{タ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 4 解答例. 以下では，

$$E_{11}:=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{12}:=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{21}:=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E_{22}:=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

と書くことにする．いま，

$$\begin{aligned}
F(1)&=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=1\cdot E_{11}+0\cdot E_{12}+1\cdot E_{21}+0\cdot E_{22}\\
F(x)&=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&1\end{pmatrix}=(-2)\cdot E_{11}+1\cdot E_{12}+(-1)\cdot E_{21}+1\cdot E_{22}\\
F(x^2)&=\begin{pmatrix}4&4\\1&2\end{pmatrix}=4\cdot E_{11}+4\cdot E_{12}+1\cdot E_{21}+2\cdot E_{22}\\
F(x^3)&=\begin{pmatrix}-8&12\\-1&3\end{pmatrix}=(-8)\cdot E_{11}+12\cdot E_{12}+(-1)\cdot E_{21}+3\cdot E_{22}
\end{aligned}$$

となるので，

$$A(F;B,B')=\begin{pmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&4&12\\1&-1&1&-1\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

となる． □

問題 3 補足解説. 本問は表現行列の定義 (定義 13.6) に従って表現行列を求める問題である．このような例を見ながら定義域や終域が $\mathbb{K}^n$ の形でない場合にも慣れていこう．ちなみに，

$$\operatorname{rank} A(F;B,B')=4$$

なので，$A(F;B,B')$ は正則で，系 13.9 より，F は線形同型写像であることがわかる． □