線形代数 II 第 14 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

とし，線形写像

$$f_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \qquad f_B \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．**解答は全て答えのみでよいが，考察の過程が正しく書いてある場合，答えが間違っていても部分点を与えることがある．**

(1) f_B の核 $\mathrm{Ker}\, f_B$ の基底を 1 つ求めよ．

(2) f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を 1 つ求めよ．

(3) f_A の像と f_B の核の共通部分 $\mathrm{Im}\, f_A \cap \mathrm{Ker}\, f_B$ の基底を 1 つ求めよ．

問題 1 解答例．

(1) B を行基本変形を用いて簡約化すると，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1,2 行に加える}]{\text{第 3 行の 2 倍を}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1,3 行を入れ替える}]{\text{第 2,3 行を} -1 \text{ 倍し，}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 1,3 行に加える}]{\text{第 2 行の} -1 \text{ 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f_B &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} \\ &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

これより，$\mathrm{Ker}\, f_B$ の基底の 1 つとして，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(2) A を行基本変形を用いて簡約化すると，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4 行に加える}]{\text{第 3 行の 1 倍,}-1\text{ 倍,1 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,3 行に加える}]{\text{第 5 行の 2 倍,1 倍,}-2\text{ 倍を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,4,5 行に加え，最後に第 2 行と第 5 行を入れ替える}]{\text{第 3 行を}-1/2\text{ 倍し，第 3 行の}-2\text{ 倍,}-3\text{ 倍,}-2\text{ 倍,}-2\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$\operatorname{Im} f_A$ の基底の 1 つとして，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる．

(3) (2) より，

$$\operatorname{Im} f_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \middle| \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

である．ここで，

$$\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B = \{ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} f_A \mid f_B(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \} = \{ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} f_A \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \}$$

であるので，c_1, c_2, c_3 に関する方程式

$$B \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

を考える．このとき左辺は

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 7 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12c_2 + 24c_3 \\ 12c_2 + 24c_3 \\ -6c_2 - 12c_3 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} 12c_2 + 24c_3 \\ 12c_2 + 24c_3 \\ -6c_2 - 12c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 + 2c_3 = 0$$

であるから，$(*)$ の一般的な解は，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ -2d_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \ d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

となる．よって，

$$\mathrm{Im}\, f_A \cap \mathrm{Ker}\, f_B = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 - 2(-2d_2) - 2d_2 \\ -d_1 + (-2d_2) + 3d_2 \\ d_1 \\ -d_1 + 2(-2d_2) + 4d_2 \\ (-2d_2) + 2d_2 \end{pmatrix} \middle| \; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 + 2d_2 \\ -d_1 + d_2 \\ d_1 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; d_1, d_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となる．ここで，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は一次独立でもあるので，これが $\mathrm{Im}\, f_A \cap \mathrm{Ker}\, f_B$ の基底の 1 つとなる．

(3):別解 (より直接的な方法で共通部分を求める) (1), (2) より，

$$\mathrm{Ker}\, f_B = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\, f_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\, f_A \cap \mathrm{Ker}\, f_B \\
&= \{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f_A \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f_B \} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \middle| \; \text{ある} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{が存在して，} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

ここで，x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 - 2c_3 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 \\ c_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 \\ c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

が解を持つための条件を調べる．この連立一次方程式の拡大係数行列を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -4 & c_1-2c_2-2c_3 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1+c_2+3c_3 \\ 0 & -1 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1+2c_2+4c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_2+2c_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行の}-2\text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -4 & 3c_1-4c_2-8c_3 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1+c_2+3c_3 \\ 0 & -1 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1+2c_2+4c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_2+2c_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1,3 行に加える}]{\text{第 4 行の 3 倍,1 倍を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 2c_2+4c_3 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1+c_2+3c_3 \\ 0 & 0 & 2 & 2c_2+4c_3 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1+2c_2+4c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_2+2c_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1,3 行に加える}]{\text{第 5 行の 4 倍,}-2\text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 6c_2+12c_3 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1+c_2+3c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1+2c_2+4c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_2+2c_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行を並べ替える}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -c_1+c_2+3c_3 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1+2c_2+4c_3 \\ 0 & 0 & 1 & c_2+2c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 6c_2+12c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

よって，$(**)$ が解を持つための必要十分条件は，

$$
6c_2+12c_3=0,\ \text{すなわち}\ c_2=-2c_3
$$

である．以上より，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B &= \left\{ \left.\begin{pmatrix} c_1-2c_2-2c_3 \\ -c_1+c_2+3c_3 \\ c_1 \\ -c_1+2c_2+4c_3 \\ c_2+2c_3 \end{pmatrix} \,\right|\, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}, c_2=-2c_3 \right\} \\
&= \left\{ \left.\begin{pmatrix} c_1-2(-2c_3)-2c_3 \\ -c_1+(-2c_3)+3c_3 \\ c_1 \\ -c_1+2(-2c_3)+4c_3 \\ (-2c_3)+2c_3 \end{pmatrix} \,\right|\, c_1,c_3\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} c_1+2c_3 \\ -c_1+c_3 \\ c_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\right|\, c_1,c_3\in\mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \left. d_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\right|\, d_1,d_2\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

は一次独立でもあるので，これが $\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B$ の基底の 1 つとなる． □

問題 1 補足解説． A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列とし，$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ という線形写像を考えたとき，$\operatorname{Ker} f_A, \operatorname{Im} f_A$ の基底を求める方法は第 14 回講義資料 p.6〜p.8 で解説されている．なお，一般にベクトル空間の基底の取り方は無限にあるので必ずしもこの解答とぴったり同じ基底になっている必要は無い．

(3) の 1 つめの解答は $\operatorname{Ker} f_B$ という部分空間の定義を用いたものであるが，別解の方法は，一般に基底のわかっている部分空間 W_1, W_2 が与えられたときに $W_1\cap W_2$ の基底を求める方法である．別解の方法を繰り返せば，3 つ以上の部分空間の共通部分についてもその基底を求めることができる． □

問題 2

a, b, c を相異なる複素数とする．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の間の線形写像

$$F\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}^3,\ f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix}$$

について正しいものを選択せよ．なお，解答は以下の **(1), (2), (3)** のいずれかを選択するだけで良いが，理由まで正しく記述した場合，**2** 点に加えて最大 **3** 点の追加点を与える．これにより，本レポート課題の点数が **10** 点を超えた場合も，切り捨てせずにそのまま成績に反映する．

(1) F は線形同型写像である．

(2) F は線形同型写像でない．

(3) F は最初に取った相異なる a, b, c の値に応じて，線形同型写像であることとそうでないことがある．

問題 2 解答例． (1)

理由：$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底として $B = \{1, x, x^2\}$, $\mathbb{C}^3$ の基底として $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を取る ($\boldsymbol{e}_i$ は第 i 基本ベクトル)．このとき，

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

$$F(x^2) = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = a^2\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + c^2\boldsymbol{e}_3$$

より，基底 B, E に関する F の表現行列は，

$$A(F; B, E) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

である．ここで，ファンデルモンド行列式の公式より，a, b, c が相異なる複素数であるとき，

$$|A(F; B, E)| = \left| \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \right| = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0.$$

よって，$A(F; B, E)$ は正則なので，F は線形同型写像である． □

問題 2 補足解説． $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ を $n+1$ 個の $\mathbb{K}$ の元とし，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の間の線形写像

$$F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1},\ f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_{n+1}) \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ の基底として $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$, $\mathbb{K}^{n+1}$ の基底として $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}\}$ を取ると，解答例と全く同様の計算により，基底 B, E に関する F の表現行列は，

$$A(F; B, E) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^n \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

となる．ここで，ファンデルモンド行列式の公式 (補足プリント『ファンデルモンド行列式について』参照) より，

$$|A(F;B,E)| = \left|\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^n \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}\right| = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} (a_j - a_i).$$

となるので，$A(F;B,E)$ が正則であるための必要十分条件は $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ が相異なることである．よって，写像 F は $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ が相異なる場合に限り，線形同型写像である．これにより以下の良く知られた事実が証明されていることになる．これはファンデルモンド行列式の公式の応用の典型例である．

(I) n 次以下の多項式 $f(x), g(x)$ が，相異なる $n+1$ 個の $\mathbb{K}$ の元 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ に対して $f(a_i) = g(a_i), i = 1, \ldots, n+1$ を満たす場合，$f(x) = g(x)$ となる．($\Leftrightarrow$ F の単射性)

(II) 任意の (重複があっても良い) $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{K}$ と相異なる $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ に対し，$f(a_i) = c_i, i = 1, \ldots, n+1$ を満たすような $\mathbb{K}$ の元を係数に持つ n 次以下の多項式 $f(x)$ が存在する．($\Leftrightarrow$ F の全射性)

なお，$a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ が相異なるとき，F^{-1} は「任意の (重複があっても良い) $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{K}$ に対して，上の (II) で述べたような $f(x)$ を与える」という写像である．F^{-1} の具体形は表現行列の逆行列の計算によって求めても良いが，以下のラグランジュ補間と呼ばれる方法によって与えられることが知られている．

$$F^{-1} \colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto c_1\ell_1(x) + c_2\ell_2(x) + \cdots + c_{n+1}\ell_{n+1}(x).$$

ここで，各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対し，

$$\ell_i(x) \coloneqq \prod_{j:1\leq j\leq n+1, j\neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \frac{(x-a_1)}{(a_i - a_1)} \cdots \frac{(x - a_{i-1})}{(a_i - a_{i-1})} \frac{(x - a_{i+1})}{(a_i - a_{i+1})} \cdots \frac{(x - a_{n+1})}{(a_i - a_{n+1})} \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}.$$

なお，$a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ が相異なるため，$\ell_i(x)$ の定義に現れる分母は 0 でないということに注意しておこう．これが $F(\ell_i) = \boldsymbol{e}_i$ を満たすということは代入してみれば用意に確かめられるので，確かに上が F^{-1} となっていることがわかる． $\square$