ベクトル空間における基底の存在について

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本資料ではベクトル空間における基底の存在を保証する以下の定理の証明を解説する．

定理 A.1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の空でない一次独立な部分集合とする．このとき，V の基底 $\widetilde{B}$ であって，$B \subset \widetilde{B}$ となるものが存在する．

この定理は「V の一次独立な部分集合 B があれば，そこに (無限個かもしれない) 元を追加することでそれを V の基底 $\widetilde{B}$ にできる」というように読める．こうするとこの定理は第 5 回講義資料定理 5.1 (2) の主張を一般のベクトル空間 V に一般化したものであるということがわかる．一般のベクトル空間においては有限個の元からなる基底が取れるとは限らないので，その点で以前よりも少し準備が必要になるというのが今回の資料で解説することである．

V が $\{\mathbf{0}\}$ でない $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間のとき，$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$ を取ると 1 元からなる集合 $B \coloneqq \{\boldsymbol{v}\}$ は V の一次独立な部分集合であるので，ここに定理 A.1 を適用すれば $\boldsymbol{v} \in \widetilde{B}$ なる V の基底 $\widetilde{B}$ が存在することがわかる．この方法は $\{\mathbf{0}\}$ でない任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V で有効なので，特に以下がわかる．

系 A.2

$\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 V は基底を持つ．

これが第 10 回講義資料定理 10.9 である．なお，そこでも述べたように $V = \{\mathbf{0}\}$ のときは $B = \varnothing$ という基底が存在すると考える．

定理 A.1 の証明の準備.

定義 A.3

S を集合とする．任意の $x, y \in S$ に対し，

$$x \rightharpoonup y \quad \text{または} \quad x \not\rightharpoonup y$$

のいずれかか定まっているとする．このとき $\rightharpoonup$ を S 上の**二項関係**という[*1]．ここで，これが以下の (i)–(iii) を満たすとき，$\rightharpoonup$ を**順序関係**といい，$(S, \rightharpoonup)$ を**半順序集合**という．

(i) (反射律) 任意の $x \in S$ に対して $x \rightharpoonup x$.

(ii) (推移律) $x \rightharpoonup y$ かつ $y \rightharpoonup z$ ならば $x \rightharpoonup z$.

(iii) (反対称律) $x \rightharpoonup y$ かつ $y \rightharpoonup x$ ならば $x = y$.

さらに，$(S, \rightharpoonup)$ が

(iv) 任意の 2 元 $x, y \in S$ に対し，$x \rightharpoonup y$ または $y \rightharpoonup x$ のいずれかが必ず成立する．

という性質をみたすとき，$(S, \rightharpoonup)$ を**全順序集合**という．

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 S 上の**関係**とは，より厳密には，$S \times S$ の部分集合 R のことである．$x, y \in S$ に対して，$(x, y) \in R$ のとき $x \rightharpoonup y$，$(x, y) \notin R$ のとき $x \not\rightharpoonup y$ と書くことにすれば，確かに任意の $x, y \in S$ に対して，$x \rightharpoonup y$ または $x \not\rightharpoonup y$ のいずれかが成立すると言える．

例 1. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ に通常の数の大小関係 $\leq$ を考えたもの $(\mathbb{N}, \leq)$ は (i)–(iv) の性質を満たし，全順序集合となる．

例 2. X を集合としたとき，X の部分集合全体からなる集合 $\mathcal{P}(X)$，すなわち

$$\mathcal{P}(X) \coloneqq \{Y \mid Y \subset X\}$$

を考える．このとき，$\mathcal{P}(X)$ において集合の包含関係 $\subset$ を二項関係と考えたもの $(\mathcal{P}(X), \subset)$ は (i)–(iii) を満たし，半順序集合となる．一方，これは一般には (iv) を満たさず，全順序集合にはならない．例で見てみよう．$X = \{a, b\}$ とする．このとき，

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

である．このとき，$\mathcal{P}(\{a, b\})$ の各元の間には以下の包含関係がある．

$$\begin{array}{ccccc} & \subset & \{a\} & \subset & \\ \varnothing & & \subset & & \{a, b\} \\ & \subset & \{b\} & \subset & \end{array}$$

ここからもわかるように，$\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(X)$ に対しては $\{a\} \subset \{b\}$ も $\{b\} \subset \{a\}$ も成立していないので，(iv) は成立していない．

定義 A.4

$(S, \rightharpoonup)$ を半順序集合とし，$T \subset S$ を空でない部分集合とする．S の元 $s \in S$ が T の**上界**であるとは，

$$\text{任意の } x \in T \text{ に対して，} x \rightharpoonup s$$

となることを言う．S の任意の空でない全順序部分集合 T が S において上界を持つとき，S を**帰納的半順序集合**という．

定義 A.5

$(S, \rightharpoonup)$ を半順序集合とする．$m \in S$ が**極大元**であるとは，$m \rightharpoonup x, x \neq m$ となる $x \in S$ が存在しないことを言う．

例 3. $(\mathbb{N}, \leq)$ の部分集合 $T = \{2, 3, 4, 5\}$ を考えると，5 以上の自然数 n は

$$2 \leq n,\ 3 \leq n,\ 4 \leq n,\ 5 \leq n$$

を満たすので，T の上界である．このように T の上界というのは T に対して一通りに定まるものではない．一方，

$$T' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ は偶数 }\}$$

とすると，任意の $k \in T'$ に対し，$k \leq m$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ は存在しない (“全ての偶数より大きい数” は存在しない！) ので，T' の上界は存在しない．T' は $\mathbb{N}$ の全順序部分集合ではあるので，このことから $\mathbb{N}$ は帰納的半順序集合ではないことがわかる．

例 4. 例 2 で見た半順序集合 $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subset)$ を考える．$\mathcal{P}(\{a, b\})$ は全順序集合ではなかったが，$\mathcal{P}(\{a, b\})$ における全順序部分集合とは，例えば，

$$\{\varnothing, \{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\varnothing, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \ldots$$

といったような，$\subset$ によって全順序集合になる $\mathcal{P}(\{a, b\})$ の部分集合のことである．一方，

$$\{\{a\}, \{b\}\} \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$$

という部分集合は，$\{a\} \subset \{b\}$ も $\{b\} \subset \{a\}$ も成立していないので全順序集合になっていないため，全順序部分集合ではない．$\mathcal{P}(\{a,b\})$ においては，$\{a,b\} \subset A, \{a,b\} \neq A$ となる $A \in \mathcal{P}(\{a,b\})$ は存在しないので，$\{a,b\}$ は $\mathcal{P}(\{a,b\})$ の極大元である．さらに，任意の $A \in \mathcal{P}(\{a,b\})$ に対して，$A \subset \{a,b\}$ が成り立つので (このような元を $\mathcal{P}(\{a,b\})$ の**最大元**という)，$\{a,b\}$ は任意の $\mathcal{P}(\{a,b\})$ の全順序部分集合の上界である．よって，$(\mathcal{P}(\{a,b\}), \subset)$ は帰納的半順序集合である．なお，同じ議論でより一般に集合 X に対して，$X \in \mathcal{P}(X)$ が $(\mathcal{P}(X), \subset)$ における最大元であり，$(\mathcal{P}(X), \subset)$ が帰納的半順序集合となることがわかる．

例 5. $\mathcal{P}(\{a,b\})$ の部分集合 $S = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}$ を包含関係 $\subset$ によって再び半順序集合とみなしたもの $(S, \subset)$ を考えよう．すると，S の空でない全順序部分集合は

$$\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{\varnothing, \{a\}\}, \{\varnothing, \{b\}\}$$

で全てである．このとき，

- $\{\varnothing\} \subset S$ の上界は $\varnothing, \{a\}, \{b\} \in S$,
- $\{a\} \subset S$ の上界は $\{a\} \in S$,
- $\{b\} \subset S$ の上界は $\{b\} \in S$,
- $\{\varnothing, \{a\}\} \subset S$ の上界は $\{a\} \in S$,
- $\{\varnothing, \{b\}\} \subset S$ の上界は $\{b\} \in S$,

となって，どの空でない全順序部分集合に対しても上界が存在することがわかるので，S は帰納的半順序集合である．さらに，$\{a\} \subset A, \{a\} \neq A$ となる $A \in S$ や，$\{b\} \subset B, \{b\} \neq B$ となる $B \in S$ は存在しないので，$\{a\}, \{b\}$ は S の極大元である．このように極大元は半順序集合において複数存在することもあり得る*2．しかし，$\{a\} \subset \{b\}$ も $\{b\} \subset \{a\}$ も成立していないので，$\{a\}$ や $\{b\}$ は S の最大元ではない．

以上の準備のもとで定理 A.1 の証明で必要となるツォルンの補題 (Zorn's lemma) が述べられる．

定理 A.6 (ツォルンの補題)

空でない帰納的半順序集合は少なくとも一つの極大元をもつ．

ツォルンの補題は**選択公理**と呼ばれる数学における公理と同値な命題であることが知られている．この意味で，これを定理ではなく公理として認めるという姿勢もあり得るかもしれないが，ここでは定理とした．ツォルンの補題と選択公理の同値性については，たとえば内田伏一 著『集合と位相』(裳華房) を参考にすること．

定理 A.1 の証明. B が V の空でない一次独立な部分集合であることから，$V \neq \{\mathbf{0}\}$ であることに注意する ($V = \{\mathbf{0}\}$ とすると，V の空でない部分集合は $B = \{\mathbf{0}\}$ のみであるが，$\{\mathbf{0}\}$ は一次独立な集合ではないので*3，この場合には V の空でない一次独立な部分集合は存在しない)．

$$\mathcal{S} \coloneqq \{B' \mid B \subset B' \subset V,\ B' \text{は一次独立}\}$$

とする．定義より $B \in \mathcal{S}$ であるので，$\mathcal{S} \neq \varnothing$ である．このとき，$\mathcal{S}$ において集合の包含関係 $\subset$ を二項関係と考えると，$(\mathcal{S}, \subset)$ は半順序集合である．これが帰納的半順序集合となることを示す．$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を空でない全順序部分集合とする．このとき，

$$B_{\mathcal{T}} \coloneqq \bigcup_{B' \in \mathcal{T}} B' \ (\subset V)$$

とする．このとき，定義から明らかに任意の $B' \in \mathcal{T}$ に対して $B' \subset B_{\mathcal{T}}$ となるので，もし $B_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}$ であれば，これは $\mathcal{T}$ の上界である．$B_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}$ を示す．まず，$\mathcal{T}$ は空でないので，$B' \in \mathcal{T}$ とすると $\mathcal{S}$ の定義より，$B \subset B'$ であるから

$$B \subset B' \subset B_{\mathcal{T}} \subset V$$

---

*2 極大元というのは言葉で言えば「比較可能なものの中では一番大きい」ということを述べているものなので，互いに比較できない極大元はこのように存在し得るのである．

*3 例えば $2 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので，$\{\mathbf{0}\}$ は一元集合であるが一次独立ではない．

である．あとは，$B_{\mathcal{T}}$ が一次独立であることを示せば良い．このためには，一次独立性の定義から任意の有限部分集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\} \subset B_{\mathcal{T}}$ が一次独立であることを示せば良い．$B_{\mathcal{T}}$ の定義より，ある $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{T}$ が存在して，$\boldsymbol{b}_j \in B_j, j = 1, \dots, k$ となる．ここで，$\mathcal{T}$ は全順序部分集合だったので，任意の $i, j = 1, \dots, k$ に対して，$B_i \subset B_j$ か $B_j \subset B_i$ のいずれかが成立する．これより，ある $1 \leq j_0 \leq k$ が存在して，任意の $j = 1, \dots, k$ に対して，

$$B_j \subset B_{j_0}$$

となる ($B_1, \dots, B_k$ の中で勝ち抜き戦のように順番に比べることで一番大きいもの B_{j_0} が取れる)．このとき，任意の $j = 1, \dots, k$ に対して，

$$\boldsymbol{b}_j \in B_j \subset B_{j_0}$$

となるので，結局 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\} \subset B_{j_0}$ である．いま B_{j_0} は一次独立な集合だったので，その部分集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$ も一次独立である (第 10 回講義資料命題 10.2)．これより $B_{\mathcal{T}}$ が一次独立であることが示されたので，$B_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}$ である．

以上の議論より，任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ に対して，その上界 $B_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}$ が取れることが分かったので，$\mathcal{S}$ は空でない帰納的半順序集合である．これより，ツォルンの補題から $\mathcal{S}$ には少なくとも一つの極大元が存在するので，それを $\widetilde{B} \in \mathcal{S}$ とする．この $\widetilde{B}$ が V の基底となることを示せば良い ($\widetilde{B}$ は $\mathcal{S}$ の元であるから $B \subset \widetilde{B}$ も満たしていることに注意)．$\widetilde{B}$ は $\mathcal{S}$ の元であるから一次独立性は満たしているので，あとは

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \widetilde{B} = V$$

を示せばよい．背理法で示す．$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \widetilde{B} \subsetneq V$ であったとすると，$\boldsymbol{v} \in V \setminus \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \widetilde{B}$ が取れる．このとき，

$$\widetilde{B}' \coloneqq \widetilde{B} \cup \{\boldsymbol{v}\}$$

とすると，$\boldsymbol{v} \notin \widetilde{B}$ であるから，$\widetilde{B} \subsetneq \widetilde{B}'$ である．さらに，$B \subset \widetilde{B} \subset \widetilde{B}'$ である．さらに，$\widetilde{B}'$ が一次独立であることが以下のようにわかる．$(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}'} \in \mathbb{K}^{\widetilde{B}', \mathrm{fin}}$ (第 10 回講義資料 p.3 下部参照) に対して，

$$\boldsymbol{0} = \sum_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}'} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \sum_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} + c_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}$$

とすると，$c_{\boldsymbol{v}} \neq 0$ であれば，

$$\boldsymbol{v} = -\sum_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}} \frac{c_{\boldsymbol{b}}}{c_{\boldsymbol{v}}} \boldsymbol{b} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} \widetilde{B}$$

となって矛盾するので，$c_{\boldsymbol{v}} = 0$．このとき，

$$\sum_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となるが，$\widetilde{B}$ は一次独立であるので，任意の $\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}$ に対し，$c_{\boldsymbol{b}} = 0$．よって結局，$(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}'} = (0)_{\boldsymbol{b} \in \widetilde{B}'}$ であることがわかるので，$\widetilde{B}'$ は一次独立であることがわかる．以上より $\widetilde{B}' \in \mathcal{S}$ となるが，$\widetilde{B} \subsetneq \widetilde{B}'$ なので，これは $\widetilde{B}$ が $\mathcal{S}$ の極大元であることに反する．よって $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} \widetilde{B} = V$ であり，示すべきことは全て示された． $\square$