線形代数 II 第 1 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

1.1 はじめに

本講義の目標は，大きく分けると

(I) n 次正方行列の対角化を学ぶ (固有値・固有ベクトル・固有空間)
(II) ベクトル空間の理論の基礎を学ぶ

ということになります．これらはいずれも線形代数にとどまらず，解析・幾何においてはもちろんのこと，応用上も非常に重要な内容です．例えば，日頃利用する Google 検索で適切な検索結果が得られているのは各ウェブページの重要度が上手く数値化されていることによりますが，これ (の一部) はある大きな行列の**固有ベクトル**を求めることによってなされています (興味のある方は「ページランク」というキーワードで調べてみてください)．また違う方向として量子力学を例に挙げると，物理的状態はある**ベクトル空間**の元として表され，一般の観測量 (Observable) は**線形写像**で表され，その観測結果は線形写像の**固有値**として表されます．他にも，最近では SEGA が社内での線形代数の勉強会の資料を公開されて話題になりました (`https://techblog.sega.jp/entry/2021/06/15/100000`)．ゲーム開発においても線形代数は重要であるということです．このように線形代数の応用範囲を挙げ始めると本当にキリがありませんし，もちろん私の能力で全てを列挙することなど不可能です．

数学目線で言うと，現在の数学においては，様々な難しい問題をいかに「線形化」あるいは「線形近似」して考えるかということがしばしば重要になり，そのたびに線形代数は避けては通れない話になります．(高校生の時に，難しい曲線の概形を調べるために微分をしてその接線 (=線形！) の傾きを調べ，増減表を書きましたね．これも線形化の一種です．) この講義で線形代数の基礎をしっかり学び，その面白さを味わって頂ければ幸いです．

記号． 本講義を通して以下の記号を用いる．これらは一般的な記号である[*1][*2]．

$$\mathbb{Z} := \{\,\text{整数}\,\} \qquad \mathbb{Q} := \{\,\text{有理数}\,\} \qquad \mathbb{R} := \{\,\text{実数}\,\} \qquad \mathbb{C} := \{\,\text{複素数}\,\}$$

また，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の添え字に “$> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$” を付けて，もとの集合からそれぞれ “正，0 以上，負，0 以下” の元を集めてきてできる部分集合を表す．例えば，$\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数全体のなす集合，$\mathbb{R}_{\leq 0}$ は 0 以下の実数全体のなす集合である．

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき，正の整数 n に対して，

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

---

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

*1 $\mathbb{Z}$ は<u>Z</u>ahl(数，ドイツ語) の Z，$\mathbb{Q}$ は<u>Q</u>uoziente(商，イタリア語) の Q，$\mathbb{R}$ は<u>R</u>eal number の R，$\mathbb{C}$ は<u>C</u>omplex number の C である．

*2 本講義では，「$A := (\dots)$」というように書くと「A を $(\dots)$ と**定義する**」という意味を表す．

とする．特に，$\mathbb{K}^n$ の元はいつも列ベクトルと考えるということに注意しておこう．また，

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (n \text{ 次ゼロベクトル}),$$

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^{(n)} = \begin{array}{c} \\ \\ i \triangleright \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,\ i = 1, \ldots, n \quad (n \text{ 次第 } i \text{ 基本ベクトル})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \text{ 次単位行列})$$

とかく．

1.2　対角化とは?

今回は第 1 回ということでこれから学ぶ**対角化**について，まずは例を通して「何をするか」を理解してもらうことにする．

n を正の整数とする．**n 次対角行列**とは，

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

という形をした行列であった．この行列の 1 つの特徴としては，整数 m に対して，m 乗が以下のように簡単に計算できるということが挙げられる．

$$D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^m \end{pmatrix}$$

一般の n 次正方行列 A ではこんなに簡単に A^m は計算できない．そこで，A^m を計算するためのアイデアの 1 つが，「A の対角化を考える」というものである．

例 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となって対角行列が現れる！これを，**A は P によって対角化される**という．この P をどのように求めたかと

いうことは一旦後回しにして，これを用いれば A^m が求められるということを見てみよう．上の式より，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} &= (P^{-1}AP)^m \\
&= \begin{cases} \overbrace{P^{-1}A\cancel{P}\cancel{P}^{-1}A\cancel{P}\cdots\cancel{P}^{-1}AP}^{m\ \text{個}} & (m \geq 0\ \text{のとき}), \\ \overbrace{P^{-1}A^{-1}\cancel{P}\cancel{P}^{-1}A^{-1}\cancel{P}\cdots\cancel{P}^{-1}A^{-1}P}^{-m\ \text{個}} & (m < 0\ \text{のとき}), \end{cases} \\
&= P^{-1}A^mP
\end{aligned}
$$

となる[*3]．この結果の辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けると，

$$
A^m = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2^{1+m} & 0 & -3+3\cdot 2^m \\ 1-2^m & 2^m & -1+2^m \\ 2-2^{1+m} & 0 & -2+3\cdot 2^m \end{pmatrix}
$$

となり，A^m が求まる！これが対角化とその応用である．対角化の定義を一般的な形で書いておこう．

定義 1.1

A を n 次正方行列とする．ある正則な n 次正方行列 P が存在して

$$P^{-1}AP$$

が対角行列となるとき，A **は** P **によって対角化される**といい，A は**対角化可能**であるという．

定義 1.1 の用語を見ると「対角化不可能なことがあるのか?」と気になるかもしれないが，実際対角化不可能な正方行列は**存在する**．どういうときに対角化可能なのかということについても次回以降学んで行くので楽しみにしておいてほしい．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 44 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ であり，

$$
P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 24 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

となる．これより，$m \in \mathbb{Z}$ に対し，例 1 と同様の計算により，

$$
P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}
$$

[*3] 一般に，正則な (=逆行列が存在する)n 次正方行列 X, Y に対して，

$$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}.$$

であった．

となる．この結果の辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けて，

$$
\begin{aligned}
A^m &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}
4-3\cdot 2^{m+1}+4\cdot 3^m-4^m & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m-1}-7\cdot 3^m+\frac{11}{6}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+2}+\frac{7}{2}\cdot 3^m-4^m & -\frac{1}{6}+2^{m-1}-\frac{3^m}{2}+\frac{1}{6}\cdot 4^m \\
4-3\cdot 2^{m+2}+4\cdot 3^{m+1}-4^{m+1} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m}+\frac{22}{3}\cdot 4^m-7\cdot 3^{m+1} & \frac{3}{2}-2^{m+3}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+1}-4^{m+1} & -\frac{1}{6}+2^{m}-\frac{3^{m+1}}{2}+\frac{2}{3}\cdot 4^m \\
4-3\cdot 2^{m+3}+4\cdot 3^{m+2}-4^{m+2} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m+1}-7\cdot 3^{m+2}+\frac{88}{3}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+4}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+2}-4^{m+2} & -\frac{1}{6}+2^{m+1}-\frac{3^{m+2}}{2}+\frac{8}{3}\cdot 4^m \\
4-3\cdot 2^{m+4}+4\cdot 3^{m+3}-4^{m+3} & -\frac{13}{3}+19\cdot 2^{m+2}-7\cdot 3^{m+3}+\frac{352}{3}\cdot 4^m & \frac{3}{2}-2^{m+5}+\frac{7}{2}\cdot 3^{m+3}-4^{m+3} & -\frac{1}{6}+2^{m+2}-\frac{3^{m+3}}{2}+\frac{32}{3}\cdot 4^m
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

対角化の応用例

上では正方行列の m 乗を計算するアイデアとしての対角化について述べた．ここでは，対角化および正方行列の m 乗計算というものがどういったところで出てくるか例を挙げておこう．

● **線形漸化式で定まる数列の一般項**

次で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を考えよう．

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_3 = d, \quad a_{n+4} = -24a_n + 50a_{n+1} - 35a_{n+2} + 10a_{n+3} \quad (n \geq 0).$$

ただし，a, b, c, d は定数．このとき，この漸化式は行列を用いて次のように表示できる：

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0).$$

このとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$ とおくと，上式を繰り返し用いることで，任意の n に対して，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

となることがわかる．よって，A^n が計算できれば左辺を計算してその第 1 成分を見ることで a_n $(n \geq 1)$ が求められることがわかる．この A^n については，例 2 で計算したので，その結果を使うと，

$$
\begin{aligned}
a_n &= a(4 - 3\cdot 2^{m+1} + 4\cdot 3^m - 4^m) + b(-\frac{13}{3} + 19\cdot 2^{m-1} - 7\cdot 3^m + \frac{11}{6}\cdot 4^m) \\
&\quad + c(\frac{3}{2} - 2^{m+2} + \frac{7}{2}\cdot 3^m - 4^m) + d(-\frac{1}{6} + 2^{m-1} - \frac{3^m}{2} + \frac{1}{6}\cdot 4^m) \\
&= (4a - \frac{13}{3}b + \frac{3}{2}c - \frac{d}{6}) + (-6a + \frac{19}{2}b - 4c + \frac{d}{2})\cdot 2^m \\
&\quad + (4a - 7b + \frac{7}{2}c - \frac{d}{2})\cdot 3^m + (-a + \frac{11}{6}b - c + \frac{d}{6})\cdot 4^m
\end{aligned}
$$

であることがわかる．最後に x^m の形に出てくる部分の x は，A を対角化した時に対角成分に並んでいた数 $1, 2, 3, 4$ であるということに注意しておこう．

● **定数係数斉次線形微分方程式系**

t を実変数とする 3 個の未知関数 $x(t), y(t), z(t)$ に関する以下の線形微分方程式系を考える．

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 4z(t) \end{cases}$$

これは行列を用いると，

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と書ける．ここで，$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ は例 1 の A なので，(1.1) の両辺に例 1 の P^{-1} を左からかけると，

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} PP^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる．ここで，

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \\ \widetilde{z}(t) \end{pmatrix} := P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - z(t) \\ -x(t) + y(t) + z(t) \\ -2x(t) + 3z(t) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

とおくと，(1.2) は

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}'(t) \\ \widetilde{y}'(t) \\ \widetilde{z}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \\ \widetilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ 2\widetilde{y}(t) \\ 2\widetilde{z}(t) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と書き換えられる (一般に実数 α, β と関数 $f(t), g(t)$ に対し，$(\alpha f(t) + \beta g(t))' = \alpha f'(t) + \beta g'(t)$ に注意)．すると，(1.4) は 3 つの未知関数に対する方程式ではあるが，それらが “混ざっておらず”，1 つの未知関数に関する方程式をただ 3 つ並べたものとなっている．一般に，実数 a と実変数関数 $\eta(t)$ に対して，

$$\eta'(t) = a\eta(t) \tag{1.5}$$

の解は

$$\eta(t) = e^{ta}\eta(0)$$

であったということを思い出すと，(1.4) より，

$$\widetilde{x}(t) = e^{t}\widetilde{x}(0) \qquad \widetilde{y}(t) = e^{2t}\widetilde{y}(0) \qquad \widetilde{z}(t) = e^{2t}\widetilde{z}(0)$$

であるということがわかる．よって，(1.3) より，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \\ \widetilde{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\widetilde{x}(t) + \widetilde{z}(t) \\ \widetilde{x}(t) + \widetilde{y}(t) \\ 2\widetilde{x}(t) + \widetilde{z}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3e^{t}(x(0) - z(0)) + e^{2t}(-2x(0) + 3z(0)) \\ e^{t}(x(0) - z(0)) + e^{2t}(-x(0) + y(0) + z(0)) \\ 2e^{t}(x(0) - z(0)) + e^{2t}(-2x(0) + 3z(0)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{t} - 2e^{2t} & 0 & -3e^{t} + 3e^{2t} \\ e^{t} - e^{2t} & e^{2t} & -e^{t} + e^{2t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t} & 0 & -2e^{t} + 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.6}$$

と解が求められる．

コラム：行列の指数関数 (やや発展)

上の定数係数斉次線形微分方程式系の最後の解に出てきた，

$$\begin{pmatrix} 3e^{t} - 2e^{2t} & 0 & -3e^{t} + 3e^{2t} \\ e^{t} - e^{2t} & e^{2t} & -e^{t} + e^{2t} \\ 2e^{t} - 2e^{2t} & 0 & -2e^{t} + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

という行列は，例 1 の最後に出した A^m の公式で，2^m が付いていない項 a を ae^t に，$a2^m$ の項を ae^{2t} に，書き直したものとなっている．この理由を簡単に説明しよう．方程式 (1.1) は

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{\xi}'(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)$$

と表すことができる．この式は両辺が多次元のベクトルなっているということを忘れると (1.5) と非常に似ており，

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{tA}\boldsymbol{\xi}(0)$$

と解きたくなる．もちろんここでは A は行列なので "e^{tA}" の意味が問題になるわけだが，実は適切に**行列の指数関数** e^{tA} を定義するとこの方針は正しいものとなる．実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{ta} = 1 + ta + \frac{t^2}{2!}a^2 + \frac{t^3}{3!}a^3 + \cdots \qquad \text{(テイラー展開)}$$

であったことを思い出し，(複素数成分)n 次正方行列 X に対し，

$$e^{tX} \coloneqq I_n + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \frac{t^3}{3!}X^3 + \cdots \tag{1.7}$$

と**定義してみよう**．定義式は無限和であるが，実は任意の t, X に対して，右辺は行列の各成分ごとに見て収束するということが知られており，t を変数と見ると各成分は t に関して収束半径が ∞ の冪級数となる．(証明は例えば「斎藤正彦 著 『線型代数入門』 (東京大学出版会)」第 7 章 §2 を参照．ただし，もう少し証明を理解するためにはもう少し線形代数を学ぶ必要がある．) これより，e^{tX} は

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$$

を満たす ((1.7) の項別微分を考えれば良い)．よって，これを用いれば，n 個の未知関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ に関する定数係数線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\eta}(t) = X\boldsymbol{\eta}(t) \quad \boldsymbol{\eta}(t) \coloneqq \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

の解は，

$$\boldsymbol{\eta}(t) = e^{tX}\boldsymbol{\eta}(0)$$

で与えられるということがわかる．これを最初の (1.1) の場合に適用してみると，

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

となるので，e^{tA} が求まれば具体的な解がわかる．(1.7) の右辺を見ると，結局それは A^m が全て具体的に計算できていればその結果から計算できるはずである．A^m は例 1 で求めているのでそれを用いて計算してみると，

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!}t^m A^m = \sum_{m\geq 0} \frac{t^m}{m!} \begin{pmatrix} 3 - 2^{1+m} & 0 & -3 + 3\cdot 2^m \\ 1 - 2^m & 2^m & -1 + 2^m \\ 2 - 2^{1+m} & 0 & -2 + 3\cdot 2^m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) - 2\left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) & 0 & -3\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) + 3\left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) \\ \left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) - \left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) & \left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) & -\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) + \left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) \\ 2\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) - 2\left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) & 0 & -2\left(\sum_{m\geq 0}\frac{t^m}{m!}\right) + 3\left(\sum_{m\geq 0}\frac{2^m t^m}{m!}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & 0 & -3e^t + 3e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & 0 & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．これで確かに上で求めたものと同じ結果となっている．この計算過程を見ると，なぜ A^m の中で 2^m が付いていない項 a を ae^t に，$a2^m$ の項を ae^{2t} に変えたものが微分方程式系の解に現れたのかも納得できるだろう．行列の m 乗計算ができれば行列の指数関数の具体計算もできるのである．