線形代数 II 第 2 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする[*1]．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

前回の講義で本講義前半の目標である対角化について例を通して学んだ．再度対角化の定義を思い出しておくと，以下の通りである．

定義 1.1 (再掲)

A を n 次正方行列とする．ある正則な n 次正方行列 P が存在して

$$P^{-1}AP$$

が対角行列となるとき，**A は P によって対角化される**といい，A は**対角化可能**であるという．

問題は各 n 次正方行列 A に対して，「A を対角化する P を (存在するとして) どのように見つけてくるのか?」ということであった．今回の講義でははこの問題への解答を与える．

2.1 固有値，固有ベクトル

上記問題への解答を与えるにあたり重要な概念を準備する．

定義 2.1

A を n 次正方行列とする．$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ が，ある $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

を満たすとき，λ を A の**固有値 (eigenvalue)**，$\boldsymbol{v}$ を**固有値 λ の A の固有ベクトル (eigenvector)** という．

例 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{v}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 \\
A\boldsymbol{v}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2 \\
A\boldsymbol{v}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

となるので，$1, 2$ はそれぞれ A の固有値であり，$\boldsymbol{v}_1$ は固有値 1 の A の固有ベクトル，$\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は固有値 2 の A

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 この講義ではしばしば『$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする』という言葉が出てくるが，進んで勉強している方はこの場合より一般に，『$\mathbb{K}$ を体 (field) とする』と読み替えて良い．

の固有ベクトルである．

例 1 からもわかるように，一般に A の固有値は複数存在し，また同じ固有値を持つ 2 つ以上の異なるベクトルが存在することもあるということに注意する．

命題 2.2

A を n 次正方行列とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{K}^n$ を A の固有値 λ の固有ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, c\boldsymbol{v}_1 (c \in \mathbb{K})$ はいずれも再び A の固有値 λ の固有ベクトルであるか $\mathbf{0}$ となる．

証明． ゼロベクトル $\mathbf{0}$ も $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ を満たすことに注意すると，結局

$$A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \qquad\qquad A(c\boldsymbol{v}_1) = \lambda(c\boldsymbol{v}_1)$$

を示せば良い．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ はどちらも A の固有値 λ の固有ベクトルなのでこれらは，

$$\begin{aligned} &A(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 = \lambda(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \\ &A(c\boldsymbol{v}_1) = cA\boldsymbol{v}_1 = c\lambda\boldsymbol{v}_1 = \lambda(c\boldsymbol{v}_1) \end{aligned}$$

と確かめられる． □

例 2. 例 1 の A と $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ について，

$$\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{K})$$

等はいずれも固有値 2 の A の固有ベクトルである．

注意 1．ここで，以下の事実に注意しておこう．

n 次正方行列 A が<u>λ を固有値に持つということがわかってしまえば</u>，固有値 λ の A の固有ベクトルは $x_1, \ldots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \text{ただし，} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ として求められる．

実際，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \iff A\boldsymbol{v} = \lambda I_n \boldsymbol{v} \iff (\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

である．これより，A の固有値が先に分かればそこから対応する固有ベクトルはすでに学んだ手順で求められる．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ は実は固有値 3 をもつ (これをどうやって "先に" 求めるかは次回の講義で解説を行う)．このとき，固有値 3 の A の固有ベクトルを求めるためには，

$$(3I_3 - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を解けばよい[*2]．ここで，係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，考えている方程式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 + x_3$$

と同値である．よって，この連立一次方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \text{ は任意の } \mathbb{K} \text{ の元})$$

となる．よって，この右辺の形をしたベクトル (の $\mathbf{0}$ 以外) が A の固有値 3 の固有ベクトルである．

2.2　固有ベクトルと対角化

さて対角化の話に戻ろう．固有ベクトルと対角化は以下のように関連している．

定理 2.3

n 次正方行列 A に対し，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在する．

さらに，(2) のような P が存在したとして，固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ に対応する固有値を順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ と書くと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．

証明．

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ A がある n 次正方行列 P を用いて対角化されたとする．つまり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \cdots \lambda_n \boldsymbol{e}_n) \tag{2.1}$$

となったと仮定する[*3]．一方，P の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにすると，行列の掛け算の定義より，

$$P^{-1}AP = P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1 \cdots A\boldsymbol{p}_n) = (P^{-1}A\boldsymbol{p}_1 \cdots P^{-1}A\boldsymbol{p}_n). \tag{2.2}$$

[*2] ここからの手順を忘れた方は第 1 回本レポート課題解答の問題 7 補足解説を参照のこと．

[*3] $\boldsymbol{e}_i$ という記号については第 1 回講義資料 p.2 参照．

(2.1) と (2.2) の右辺の行列を列ごとに比較すると，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$P^{-1}A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i \tag{2.3}$$

が成立することがわかる．ここで，行列の掛け算の定義より $\boldsymbol{p}_i = P\boldsymbol{e}_i$ であることに注意すると，(2.3) の両辺に左から P を掛けて，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i P\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i \tag{2.4}$$

を得る．(2.4) は各 $\boldsymbol{p}_i$ が固有値 λ_i の A の固有ベクトルであるということを示す式に他ならない．よって，P が A の固有ベクトルを並べてできる n 次正方行列であったということがわかる．

(2) ⇒ (1) P は第 i 列が $\boldsymbol{p}_i$ の行列なので，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して行列の掛け算の定義より $\boldsymbol{p}_i = P\boldsymbol{e}_i$ であるが，仮定より P は正則でもあるので，この式の両辺に左から P^{-1} を掛けると，

$$P^{-1}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{e}_i. \tag{2.5}$$

さらに仮定より各 $\boldsymbol{p}_i$ は A の固有ベクトルなので，その固有値を λ_i と書くと，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i. \tag{2.6}$$

(2.5), (2.6) より，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}A(\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n) \\
&= P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1 \cdots A\boldsymbol{p}_n) \\
&= P^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\lambda_1 P^{-1}\boldsymbol{p}_1 \cdots \lambda_n P^{-1}\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1 \cdots \lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり，確かに A が対角化可能であることがわかる．

「さらに，」以降の主張 (2) ⇒ (1) の証明がすでにこの事実を示している． □

定理 2.3 の (1) ⇒ (2) の証明は以下の主張の証明にもなっている．

系 2.4

n 次正方行列 A がある正則な n 次正方行列 P を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化されたとする．このとき，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，P の第 i 列 $\boldsymbol{p}_i$ は固有値 λ_i の A の固有ベクトルである．

例 3. 例 1 の $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ を考える．例 1 で，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は順に固有値 $1, 2, 2$ の A の固有ベクトルであることを見た．ここで，これらを並べてできる行列を

$$P \coloneqq (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{aligned} |P| &= (-1)^{2+2} \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\ &= 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

となるので，P は正則である．よって，定理 2.3 より，このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である．この計算において，P^{-1} の具体的な計算や，行列の積の定義に基づいた $P^{-1}AP$ の計算は行っていないということに注意しよう．実はここで求めた P が第 1 回講義資料の例 1 の P に他ならない！

また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を並べる順番を変えて，

$$P' \coloneqq (\boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

としてみると，P' は P の列を並べ替えただけなので，行列式の交代性より $|P'|$ の値はやはり 0 ではなく，P' は正則である．このとき P' は固有値 $2, 1, 2$ の A の固有ベクトルを左から順に並べてできる正則行列なので，定理 2.3 より，

$$(P')^{-1}AP' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である．このように「固有ベクトルをどのように並べて P を作るか」ということと「対角化後に出来上がる対角行列に対角成分がどう並ぶか」ということが対応している．

さらに，同じ固有値を持つ固有ベクトルは複数あり得るということから同じ対角化の結果を与える P の取り方も無数にあるということに注意したい．例えば，例 2 で

$$\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad 100\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

もそれぞれ A の固有値 2 の固有ベクトルであるということを見た．そこで，

$$P'' \coloneqq (\boldsymbol{v}_1\ 100\boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 100 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としてみると，これも固有値 $1, 2, 2$ の A の固有ベクトルを左から順に並べてできる正則行列である．(正則であることはやはり行列式の性質から容易にわかる．確認してみよ．) よって，定理 2.3 より，

$$(P'')^{-1}AP'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

例 4. 第 1 回講義資料の例 2 の行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$ についても見ておこう．このとき，A は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化されるのであった．系 2.4 より，P の各列ベクトルは左から順に固有値 $1, 2, 3, 4$ の A の固有ベクトルとなる．実際に

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix}$$

とおいて確かめてみると，

$$A\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1$$

$$A\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{p}_2$$

$$A\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{p}_3$$

$$A\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 64 \\ 256 \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{p}_4$$

となっている．