線形代数 II 第 3 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

前回の講義では n 次正方行列の対角化について以下の事実を学んだ．

系 2.4 (再掲)

n 次正方行列 A がある正則な n 次正方行列 P を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と対角化されたとする．このとき，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，P の第 i 列 $\boldsymbol{p}_i$ は固有値 λ_i の A の固有ベクトルである．

ここからわかるように n 次正方行列 A を対角化する行列 P を得るためには，A の固有ベクトルを見つけて，それを並べて正則行列を作る必要があった．ここで，第 2 回講義資料注意 1 より，n 次正方行列 A に対して，**A が λ を固有値に持つということがわかっていれば**，固有値 λ の A の固有ベクトルは連立一次方程式を解くことで求めることができた．よって，残った問題は「どうやって A の固有値を見つけるか」「どのように固有ベクトルを並べればちゃんと正則な行列が得られるか」である．今回はこのうち「どうやって A の固有値を見つけるか」という問題の答えを与える．

3.1 固有多項式

A を n 次正方行列とする．『A に固有値 λ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する』という条件を次のように言い換えてみる．

$$\begin{aligned}
&A \text{ に固有値}\lambda\text{の固有ベクトル } \boldsymbol{v} \text{ が存在する．}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \text{であって，} A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \text{ となるものが存在する．}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \text{であって，} (\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ となるものが存在する．}\\
&\Leftrightarrow \text{連立一次方程式 } (\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ が } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 以外の解を持つ．}\\
&\Leftrightarrow \text{連立一次方程式 } (\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ の解の自由度が 1 以上である．}\\
&\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda I_n - A) < n.\\
&\Leftrightarrow \lambda I_n - A \text{ は正則でない．}\\
&\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0.
\end{aligned}$$

この観察から，以下のような定義を行う．

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

定義 3.1

n 次正方行列 A に対し，$\underline{t\text{ を変数}}$とする多項式 $\Phi_A(t)$ を，

$$\Phi_A(t) := \det(tI_n - A)$$

と定義する．この多項式を A の**固有多項式** (あるいは**特性多項式**) という．また，方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

を A の**固有方程式** (あるいは**特性方程式**) という．

定義 3.1 の前の観察から以下の定理がわかる．

定理 3.2

n 次正方行列 A に対し，λ が A の固有値であることと，λ が A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解であることは同値である．

つまり，n 次正方行列 A の固有値を求めるためには固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解けば良いのである．

例 1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = |tI_2 - A| = \left| \begin{pmatrix} t+2 & -1 \\ 4 & t-3 \end{pmatrix} \right| = (t+2)(t-3) - (-1)\cdot 4 = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, 2$．よって，A は $-1, 2$ を固有値として持つ．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) = |tI_3 - A| &= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 4 \\ 4 & t-3 & -4 \\ -3 & 5 & t+5 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-2)(t-3)(t+5) + 5\cdot(-4)\cdot(-3) + 4\cdot 4\cdot 5 - (t-2)\cdot(-4)\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot(t+5) - 4\cdot(t-3)\cdot(-3) \\ &= t^3 - 7t - 6 = (t+1)(t+2)(t-3) \end{aligned}$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, -2, 3$．よって，A は $-1, -2, -3$ を固有値として持つ．

例 3 ((やや発展))**.** $n \geq 2$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$ $(c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K})$ とする．このとき，A の固有多項式は

$$\Phi_A(t) = t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 \tag{3.1}$$

となる．このことを n に関する帰納法で証明する．まず，$n = 2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix}$ なので，

$$\Phi_A(t) = |tI_2 - A| = \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -c_0 & t-c_1 \end{pmatrix} \right| = t(t-c_1) - (-1)(-c_0) = t^2 - c_1 t - c_0$$

となり，(3.1) は確かに正しい．次に，$n = k (k \geq 2)$ の場合に (3.1) が成り立っていると仮定して，$n = k+1$

の場合を示す．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\c_0&c_1&\cdots&c_{k-1}&c_k\end{pmatrix}\ (\text{これは}\ (k+1)\times(k+1)\ \text{行列})$$

に対し，

$$\Phi_A(t)=|tI_{k+1}-A|=\left|\begin{pmatrix}t&-1&0&\cdots&0\\0&t&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&t&-1\\-c_0&-c_1&\cdots&-c_{k-1}&t-c_k\end{pmatrix}\right|$$

$$=t\left|\begin{pmatrix}t&-1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&t&-1\\-c_1&\cdots&-c_{k-1}&t-c_k\end{pmatrix}\right|+(-1)^{1+k+1}(-c_0)\left|\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&\cdots&0\\t&-1&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&-1&0\\0&0&\cdots&t&-1\end{pmatrix}\right| \tag{3.2}$$

(第 1 列に関して余因子展開)

ここで，(3.2) の和の第 1 項の行列式は $k\times k$ 行列

$$A'=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1\\c_1&c_2&\cdots&c_{k-1}&c_k\end{pmatrix}$$

の固有多項式となっているので，帰納法の仮定より，

$$t\left|\begin{pmatrix}t&-1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&t&-1\\-c_1&\cdots&-c_{k-1}&t-c_k\end{pmatrix}\right|=t(t^k-c_kt^{k-1}-\cdots-c_2t-c_1)=t^{k+1}-c_kt^k-\cdots-c_2t^2-c_1t$$

さらに，(3.2) の和の第 2 項の行列式は $k\times k$ の下三角行列の行列式[*1]で，対角成分は全て -1 なので，その値は $(-1)^k$．よって，

$$(-1)^{1+k+1}(-c_0)\left|\begin{pmatrix}-1&0&\cdots&\cdots&0\\t&-1&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&-1&0\\0&0&\cdots&t&-1\end{pmatrix}\right|=(-1)^{k+2}(-c_0)(-1)^k=((-1)^2)^{k+1}(-c_0)=-c_0.$$

以上より，

$$\Phi_A(t)=t^{k+1}-c_kt^k-\cdots-c_2t^2-c_1t-c_0$$

も示された．よって，(3.1) が証明された．

この例で扱った形の行列 A は，線形漸化式

$$a_{\ell+n}=c_0a_\ell+c_1a_{\ell+1}+\cdots+c_{n-1}a_{\ell+(n-1)}$$

[*1] 下三角行列/上三角行列の行列式は対角成分の積であったことを思い出そう．証明は余因子展開を考えれば容易である．

で定まる数列 $\{a_\ell\}_{\ell=0,1,2,\ldots}$ を表すのに用いられる行列であった (第 1 回講義資料 p.4 参照)．つまり，この数列は

$$A\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\ell+1} \\ a_{\ell+2} \\ \vdots \\ a_{\ell+n} \end{pmatrix}$$

で定まる数列である．このとき，この数列の一般項を求めるためには A^ℓ を求めれば良かった．(必ずしも A が対角化できるとは限らないが，) もし A が対角化できるのであれば，A^ℓ を求められる．そこで，対角化のためにはまず A の固有値を知る必要があり，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解く必要がある．つまり，

$$t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 = 0$$

をまず解けばよいということがわかる．もし高校などで三項間漸化式

$$a_{\ell+2} = c_0 a_\ell + c_1 a_{\ell+1}$$

の解き方として，

まず特性多項式 $t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ を解く

という方法を習った人がいれば，「この方程式はどこから来たのか?」と思ったことがある人もいるかもしれないが，これはまさにここでの解法の $n = 2$ の場合に他ならない．この方法は実は n 項間漸化式に一般化できるものだったのである．

以下は固有多項式に関する基本性質である．

命題 3.3

n 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ について以下が成立する．

(1) $\Phi_A(t)$ は t に関する n 次式であり，t^n の係数は 1.

(2) $\Phi_A(t)$ の t^{n-1} の係数は A の対角成分の和を -1 倍したもの，すなわち $-\operatorname{Tr}(A)$ である[*2].

(3) $\Phi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n \det(A)$.

(4) A の固有多項式と A の転置 ${}^tA$ の固有多項式は一致する．さらに，任意の n 次正則行列 P に対し，A の固有多項式と，$P^{-1}AP$ の固有多項式は一致する．すなわち，

$$\Phi_A(t) = \Phi_{{}^tA}(t) = \Phi_{P^{-1}AP}(t)$$

である．

証明． A の (i,j) 成分を a_{ij} と書くと，定義より

$$\Phi_A(t) = |tI_n - A| = \left|\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & t-a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

---

*2 n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ に対し，

$$\operatorname{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (\text{対角成分の和})$$

と書く．この値を A のトレース **(trace)** という．

となる．このとき，(1), (2) は右辺の行列式を行列式の明示式から計算してみようとするとわかる (第 1 回本レポート課題問題 1 補足解説参照)．実際，t^n および t^{n-1} の項は対角成分を掛けた

$$(t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn})$$

という項のみから現れる．(3) は

$$\Phi_A(0) = |-A| = (-1)^n|A| \quad (\text{行列式の多重線形性より})$$

よりわかる．(4) は以下の計算より従う．

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= |tI_n - A| = |{}^t(tI_n - A)| \quad (\text{行列式の転置不変性}) \\ &= |tI_n - {}^tA| = \Phi_{{}^tA}(t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= |tI_n - A| \\ &= |P^{-1}|\cdot|tI_n - A|\cdot|P| \quad \left(|P^{-1}| = \frac{1}{|P|}\text{なので}\right) \\ &= |P^{-1}(tI_n - A)P| \quad (\text{一般に } n \text{ 次正方行列 } A, B \text{ に対して，} |AB| = |A|\cdot|B| \text{ なので}) \\ &= |tP^{-1}P - P^{-1}AP| \\ &= |tI_n - P^{-1}AP| = \Phi_{P^{-1}AP}(t).\end{aligned}$$

□

注意 1. 命題 3.3 (1), (2), (3) より，A が 2 次正方行列の時，

$$\Phi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)$$

である．

3.2 対角化の結果のある意味での一意性

さて，対角化の話に戻ろう．正方行列 A の固有多項式は，A がどんな固有値を持つかという情報 (定理 3.2) だけでなく，最終的に対角化した時に**どの固有値がいくつ出てくるか**という情報まで持っている．それを主張するのが以下の定理である．

定理 3.4

n 次正方行列 A が対角化可能であるとする．このとき，A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は以下のような一次式の積に書ける．

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$．各 m_i は正の整数で，$\sum_{i=1}^k m_i = n$．このとき，A を対角化した結果の対角成分には λ_i が m_i 個 $(i = 1, \ldots, k)$ 現れる．特に，A を対角化した結果は対角成分を並べる順の違いの差を除くと 1 通りに定まる．

注意 2 (細かい注意 (やや発展)). 命題 3.3 (1) より，$\Phi_A(t)$ は t^n の係数が 1 の t の n 次式なので，複素数 $\mathbb{C}$ の範囲では必ず

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

という形に因数分解できる．この事実はこの講義では証明を行わないが**代数学の基本定理**と呼ばれる有名な定理で，様々な証明がある．この意味で，定理 3.4 の主張は A が対角化可能であるという仮定を入れなくても自明に成立するように思われる．しかし，定理 3.4 は $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ として考えると，実行列 (成分が実数の行列) を用いて，実行列 A が対角化可能なとき，$\Phi_A(t)$ が実数の範囲で因数分解できる(すなわち λ_i らが全て実数に取れる) ということを主張しているのである．

例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\Phi_A(t) = |tI_2 - A| = \left| \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \right| = t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$$

となる．つまり $\Phi_A(t)$ は複素数の範囲では因数分解できるが，実数の範囲では因数分解できない．よって，定理 3.4 より，A は実行列を用いては対角化できないということがわかる．実際，この A は実平面 $\mathbb{R}^2$ において 90° 回転を表す行列であるので，$\mathbb{R}^2$ 内に固有ベクトルを持たないということは幾何的にもわかる (第 2 回講義資料系 2.4 の主張をあわせて思い出すこと)．複素行列まで許すと，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

と対角化される．

注意 3. 定理 3.4 は A が対角化可能であれば，$\Phi_A(t)$ が因数分解できるということを述べているが，$\Phi_A(t)$ が因数分解できるならば A が対角化可能ということは**述べていない**ということに注意しよう．実際これは正しくない (以下の例 6 を参照のこと)．

定理 3.4 の証明． A が対角化可能なとき，ある n 次正則行列 P を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \text{が}\ m_1 \text{個}, \lambda_2 \text{が}\ m_2 \text{個}, \dots, \lambda_k \text{が}\ m_k \text{個}) \tag{3.3}$$

という形に書ける．ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$(P の列ベクトルの並べ方を変えることで対角成分の順番は自由に並べ替えられたことに注意)．このとき，命題 3.3 (4) より，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \Phi_{P^{-1}AP}(t) = |tI_n - P^{-1}AP| \\ &= \left| \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k \end{pmatrix} \right| = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

となる．多項式 $\Phi_A(t)$ を 1 次式の積に分解する方法は 1 通りなので，上の計算は $\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$ となるとき，対角化の結果は対角成分を並べる順の違いの差を除いて必ず (3.3) の形になるということも示している (もし上とは異なる対角成分の現れ方となったとすると $\Phi_A(t)$ の別の因数分解が得られることになる)．これは対角化の結果が $\Phi_A(t)$ から (つまり A から) 対角成分を並べる順の違いの差を除いて 1 通りに決まっているということを意味している． □

例 4. 例 1 で扱った行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = (t+1)(t-2)$$

であった．よって，定理 3.4 より，A は対角化可能であれば，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という形に対角化される．次回の講義でもう一度扱うが，実は以下の事実が一般に成り立つ．

事実 3.5

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つとき，A は対角化可能である．

この事実を用いれば，A は $-1, 2$ という相異なる 2 個の固有値を持つので対角化可能であることがわかる．よって，A は実際に

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化される．ここでは**対角化に用いる正則行列 P すら具体的に求めていない**ということに注意しよう．

これを確認するために対応する固有ベクトルを求めて A を対角化してみよう．A の固有値 -1 の固有ベクトルを求める．x, y に関する連立一次方程式

$$(-I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい．係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ を行基本変形を用いて簡約化すると，$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，この方程式は，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

と同値である．よって，

$$\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{3.4}$$

が A の固有値 -1 の固有ベクトルである．同様にして固有値 2 の固有ベクトルを求める．

$$(2I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4x = y$$

より，

$$\begin{pmatrix} c \\ 4c \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{3.5}$$

が A の固有値 2 の固有ベクトルである．このとき，(3.4), (3.5) の形のベクトルをそれぞれ選んで並べ ($c = 1$ とした)，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とするとこれは正則で，確かに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．なお，**この最後の計算では P^{-1} を具体的に計算する必要はなくて，P が (固有値 -1 の固有ベクトル，固有値 2 の固有ベクトル) という形の行列であることから結果が直ちにわかっている**ということに注意しよう．例えば，P における固有ベクトルの並べ方を変えて，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

例 5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) = |tI_3 - A| &= \left| \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^{2+2}(t-2) \left| \begin{pmatrix} t+1 & -3 \\ 2 & t-4 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\ &= (t-2)((t+1)(t-4) - (-3)\cdot 2) = (t-2)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)(t-2)^2\end{aligned}$$

となる．これより，定理 3.4 から，A は対角化可能であれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

という形に対角化される (1 が 1 つ，2 が 2 つ)．第 1 回講義資料例 1 あるいは第 2 回講義資料例 3 より，この A は実際にこの形に対角化可能であった．

例 6. 最後に，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化不可能であることを証明してみよう．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = |tI_3 - A| = \left| \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \right| = t^3$$

となるので，定理 3.4 から，A は対角化可能であれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という形に対角化される (対角成分に 0 が 3 つの対角行列)．しかし，このときこの式の両辺に左から P，右から P^{-1} を掛けると，

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，これは矛盾である．よって，A は対角化不可能である．実際，

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

より，A の固有値 0 の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

という形のもののみである．この形のベクトルを 3 つ選んできて並べても

$$P = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という形の行列しか作れず，これは明らかに正則ではないので対角化不可能である．