線形代数 II 第 4 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

今回までの講義では n 次正方行列 A の対角化について，以下のように学んできた．

(1) A が対角化可能であることと，A の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n\in\mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる n 次正方行列 $P=(\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在することが同値．この P によって，$P^{-1}AP$ は対角行列になり，対角成分には $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ に対応する固有値が順に並ぶ (定理 2.3，系 2.4)．

(2) A の固有値は固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の解として得られる (定理 3.2)．

(3) A が固有値 λ を持つことが分かれば，対応する固有ベクトルは連立一次方程式 $(\lambda I_n-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くことで得られる (第 2 回講義資料注意 1)．

よって，最後に残った問題は，「(2)，(3) によって求められる A の固有ベクトルをどのように並べれば正則な行列 P が得られるのか ((1) の P)」ということである．今回はこの問題の回答をまずは証明抜きで与え，対角化可能性の判定，および対角化可能である場合の対角化を与える正則行列を求める手順を解説する．その後，ここで証明抜きで与えた事実の証明を与えるため，**一次独立性**という線形代数において重要な概念を導入する．

4.1　対角化可能性の判定および対角化の手順

本節では $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする．このとき，n 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ はある $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ を用いて必ず

$$\Phi_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

と一次式の積に因数分解される (代数学の基本定理：任意の一変数 n 次多項式は重複も込めると必ず n 個の複素数根を持つ)[*1]．ここで，固有ベクトルを並べて正則行列を作るということについて，以下の事実を一度認める．証明は今後の講義で行う．

* *e-mail*: `hoya@shibaura-it.ac.jp`

[*1] $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ として実行列のみを考えても，その固有多項式は必ずしも実数根を持つとは限らない．例えば，

$$\Phi_{\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}(t)=\left|\begin{pmatrix}t&1\\-1&t\end{pmatrix}\right|=t^2+1=(t+i)(t-i).$$

となる．このように実行列が実数根を持たない場合，それは定理 3.4 で見たように**実正則行列 P を用いては対角化できない**のであった．しかし，複素行列まで許せば対角化できることもあり，実際 $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ も複素正則行列 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-i&i\end{smallmatrix}\right)$ によって対角化される (第 3 回講義資料注意 2)．このような "どの範囲で対角化可能か" という問題は少しややこしいので，一旦全て複素数の範囲で話を進めておいてから改めて述べることにする (注意 2) というのがこの節の方針である．

事実 4.1

n 次正方行列 A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を λ_1(重複度 m_1),$\ldots$,λ_k(重複度 m_k) とする (ただし，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする)．すなわち，

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

であるとする．このとき，以下が成立する．

(1) 各 $i = 1, \ldots, k$ に対して，$1 \leq n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) \leq m_i$．すなわち，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は 1 以上 m_i 以下．

(2) ある $i = 1, \ldots, k$ が存在して，$n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) < m_i$ となるとき，A は対角化不可能である．

(3) 全ての $i = 1, \ldots, k$ に対して $n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) = m_i$ が成立するとき，A は対角化可能である．このとき，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が m_i なので，この解の全体はある $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \in \mathbb{C}^n$ を用いて，

$$\{c_1 \boldsymbol{p}_1^{(i)} + \cdots + c_{m_i} \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \mid c_1, \ldots, c_{m_i} \in \mathbb{C}\}$$

と書ける．この $\boldsymbol{p}_k^{(i)}$ らを並べて得られる n 次正方行列

$$P = (\underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(1)} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}}_{m_1\text{個}} \ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(2)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}}_{m_2\text{個}} \ \cdots \ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(k)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)}}_{m_k\text{個}})$$

は正則である．ここで，$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ であることに注意する．

事実 4.1 から以下の定理は直ちに導かれる．

定理 4.2

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つとき，A は対角化可能である．

(事実 4.1 を認めて) 証明. n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとき，定理 3.2 からその固有多項式 $\Phi_A(t)$ は

$$(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

で割り切れるが，命題 3.3 (1) で見たように $\Phi_A(t)$ は t^n の係数が 1 の n 次多項式なので，

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

である．特に，全ての固有値の重複度は 1 である．このとき，事実 4.1 (1) より，全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$1 \leq n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) \leq 1, \text{ すなわち, } n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) = 1.$$

よって，事実 4.1 (3) より A は対角化可能である． □

以上の事実とこれまでに学んだことを用いれば対角化可能性の判定，および対角化可能である場合の対角化を与える正則行列を求める手順は以下で与えられることがわかる．なお，この下に例も与えるので，一般的な記号がわかりにくいという場合にはその例と照らし合わせながら読んでいただきたい．

n 次正方行列 A の対角化可能性の判定

(1) A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1),$\ldots$,λ_k(重複度 m_k) とする (ただし，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする)．

(1′) 手順 (1) の時点で A が相異なる n 個の固有値を持つことがわかった場合 (すなわち全ての固有値の重複度が 1 である場合)，A は対角化可能である．

(2) 重複度が 2 以上の全ての固有値 λ_j について，$n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A)$ を計算し，一つでも m_j より小さいものがあれば A は対角化不可能である．逆に全ての固有値 λ_j に対して $n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A) = m_j$ が成立する場合，A は対角化可能である．

対角化可能な n 次正方行列 A を対角化する正則行列 P を求める手順

(1) A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とする (ただし，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする)．

(2) 各 λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ に対して，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く．このとき，A が対角化可能であれば解の自由度は m_i となるので，この解の全体はある $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \in \mathbb{C}^n$ を用いて，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)} + \cdots + c_{m_i}\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \mid c_1, \ldots, c_{m_i} \in \mathbb{C}\}$$

と書ける．こうして得られる $\boldsymbol{p}_k^{(i)}$ らを並べて n 次正方行列

$$P = (\underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(1)} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}}_{m_1\text{個}} \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(2)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}}_{m_2\text{個}} \ \cdots \ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(k)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)}}_{m_k\text{個}})$$

を作ればこれが求める正則行列である．ここで，$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ であることに注意する．このとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1\text{が } m_1\text{個}, \lambda_2\text{が } m_2\text{個}, \ldots, \lambda_k\text{が } m_k\text{個})$$

となる．

注意 1. 繰り返しの注意となるが，対角化の結果得られる対角行列を知りたいだけなら対角化に用いる正則行列 P を求める必要はない．対角化可能な場合，対角化の結果は各固有値が重複度の個数並ぶだけである．

注意 2 (少し進んだ話なので混乱しそうな方は一旦読み飛ばしても良い)．実行列 A を実正則行列を用いて対角化可能かどうかの判定 (つまり $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の設定での上の話) は実はほぼ同様である．実際，実行列を用いて対角化可能というのは，「複素行列の範囲で対角化可能，かつ上の記号で各 $\boldsymbol{p}_k^{(i)}$ らが全て $\mathbb{R}^n$ から取れる (このとき各固有値 λ_i は自動的に実数値となることに注意)」ということに他ならない．さらに，A の固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを求めるときの連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は，A が実行列で固有値 λ_i も実数の場合，実係数の連立一次方程式なので $\mathbb{C}^n$ の範囲で解を考えても $\mathbb{R}^n$ の範囲で解を考えても解の自由度は $n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A)$ で同じである (連立一次方程式は行基本変形という簡単な操作の繰り返しのみで解けるということがポイントであるとも言える)．よって，以下のようにまとめられる．

n 次実正方行列 A が n 次実正則行列 P によって対角化可能かどうかの判定

A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ がある $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

と一次式の積に<u>因数分解されない場合</u>，実正則行列による対角化は不可能である．逆に上のように因数分解される場合，残りの判定手順は複素行列の範囲で対角化可能かどうかを判定する手順 (p.2 下部の手順) と全く同じようにすれば良い．

さらに，n 次実正方行列 A が n 次実正則行列 P によって対角化可能であると分かった後に実際に P を求める手順についても，各 λ_i $(i = 1, \ldots, k)$ に対して，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を $\mathbb{R}^n$ の範囲で解いて $\boldsymbol{p}_k^{(i)}$ らを選んでくれれば良いだけなので上に述べたものと全く同じである．

例 1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の対角化可能性を判定し，対角化可能であれば対角化してみよう．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-5 & -2 & -4 \\ 4 & t+1 & 4 \\ 4 & 2 & t+3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} t-1 & -2 & -4 \\ 0 & t+1 & 4 \\ -t+1 & 2 & t+3 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 3 列の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\ &= \left| \begin{pmatrix} t-1 & -2 & -4 \\ 0 & t+1 & 4 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 3 行に第 1 行を加えた}) \\ &= (t+1)(t-1)^2 \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 1), 1(重複度 2) である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$3 - \mathrm{rank}(I_3 - A) = 2$(固有値 1 の重複度に等しい)[*2]であり，この連立一次方程式の解は

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．これらは固有値 1 に対する固有ベクトルである．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の係数行列 $-I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[*2] 対角化可能性を知るためには，あとは $3 - \mathrm{rank}(-I_3 - A) = 1$ を示す必要があるが，重複度 1 の固有値については事実 4.1 (1) より，$1 \leq 3 - \mathrm{rank}(-I_3 - A) \leq 1$，すなわち $3 - \mathrm{rank}(-I_3 - A) = 1$ は自動的にわかるので，確かめる必要はない．つまり，$3 - \mathrm{rank}(I_3 - A) = 2$ がわかった時点で対角化可能であることがわかる．このように考えられるので，対角化可能性の判定においては「重複度が 2 以上の固有値 λ_j についてのみ $n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A) = m_j$ を確かめる」というように書いたのである．なお，この事情からそもそも対角化可能性から判定する問題においては重複度が 2 以上の固有値から固有ベクトルをまず求めるのが得策である．

となるので，この連立一次方程式の解は

$$\left\{ c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{C} \right\}.$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．これは固有値 -1 に対する固有ベクトルである．

以上より，A は対角化可能で，

$$P = (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \ \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

例 2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ の対角化可能性を判定してみよう．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-4 & -4 & 3 \\ -3 & t+1 & 9 \\ -5 & -3 & t+7 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-4)(t+1)(t+7) + 180 + 27 - (-27)(t-4) - 12(t+7) - (-15)(t+1) \\ &= (t+1)^2(t+2) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 2), -2(重複度 1) である．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを考える．それは x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解として得られるが，係数行列 $-I_3 - A$ を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$3 - \mathrm{rank}(-I_3 - A) = 3 - 2 = 1 < 2(= \text{固有値} - 1 \text{ の重複度})$$

となるので，A は対角化不可能である．

4.2 一次独立性

ここからは，事実 4.1 を証明するための準備に入る．この事実は「行列の固有ベクトルを並べて正則行列 P が得られるか」という話と関連していたが，まずは行列の正則性を列ベクトルの**一次独立性**という言葉で言い直すことができることを述べる (系 4.5)．一次独立性は対角化の話だけにとどまらず，今後線形代数を進めて

いく上で非常に基本的で重要な概念となるのでこの機会にしっかり身につけて欲しい．以下では再び $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

定義 4.3

$\mathbb{K}^n$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が ($\mathbb{K}$ 上) **一次独立** (または**線形独立**) であるとは，条件

$$「c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K} \text{ ならば，必ず } c_1 = \cdots = c_k = 0」$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は ($\mathbb{K}$ 上) **一次従属** (または**線形従属**) であるという．

これから一次独立な元の組の例を見ていくが，その際には以下の定理が便利である．

定理 4.4

$\mathbb{K}^n$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し，以下は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は一次独立．

(2) $n \times k$ 行列 $B = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_k)$ を考えると，$\operatorname{rank} B = k$.

特に，$\mathbb{K}^n$ の $n+1$ 個以上の元からなる組は必ず一次従属である．

証明. 一次独立性の定義の条件は以下のように同値な条件に言い換えられる．

$$\begin{aligned}
&c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K} \text{ ならば，必ず } c_1 = \cdots = c_k = 0. \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_k)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k \text{ ならば，必ず } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}. \\
&\Leftrightarrow \text{連立一次方程式 } B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解は } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ のみである．} \\
&\Leftrightarrow \text{連立一次方程式 } B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解の自由度は } 0 \text{ である．} \\
&\Leftrightarrow k - \operatorname{rank} B = 0. \\
&\Leftrightarrow k = \operatorname{rank} B.
\end{aligned}$$

これより，(1) と (2) の同値性が示された．最後の主張は，$\operatorname{rank} B \leq n$(ランクは B の行数を超えない) であることから，$k \geq n+1$ のとき必ず $\operatorname{rank} B \neq k$ となることより，上で示した同値性を用いてわかる． □

注意 3. 定理 4.4 の証明中の同値変形より，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が一次従属である場合の

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

を満たす非自明な $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ を見つけることは，連立一次方程式

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad (\text{ただし，} B = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_k))$$

の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を見つけることに他ならないということがわかる．

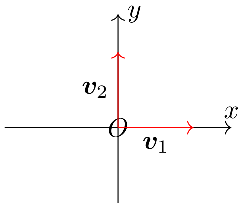
例 3. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}$ 上一次独立である．なぜなら，

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

となるためである．実際，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

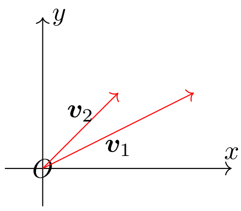
より，$c_1 = c_2 = 0$ となる．



例 4. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}$ 上一次独立である．なぜなら，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

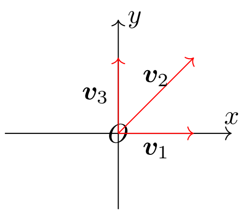
となるためである．



例 5. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}^2$ 内の 3 つの元なので，定理 4.4 より $\mathbb{K}$ 上一次従属である．実際，

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

となるので，$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$ のときに，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立してしまう．



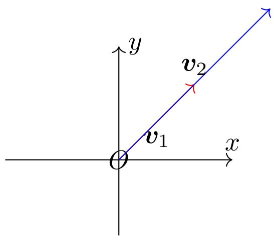
例 6. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}$ 上一次従属である．なぜなら，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

となるためである．実際，

$$2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$$

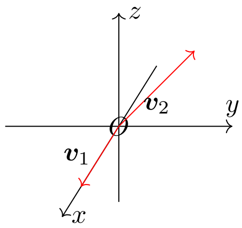
となるので，$c_1 = 2, c_2 = -1$ のときに，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が成立してしまう．



例 7. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}$ 上一次独立である．なぜなら，

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

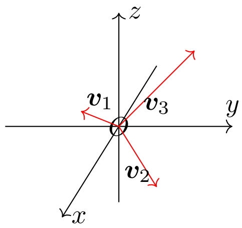
となるためである．



例 8. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{K}$ 上一次独立である．なぜなら，

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

となるためである．



例 9. $\mathbb{K}^3$ の任意の 4 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は定理 4.4 より一次従属である．

注意 4. 以上の例を見ると，一次独立は "本質的にばらばらの方向を向いている" という状況を上手く数学的に定式化したものであり，一次従属は "そのベクトルらの間に非自明な関係がある" という状況を上手く定式化したものであることがわかるだろう．なお，線形空間論においては "その空間において一次独立となる最多のベクトルの数" を**次元**と<u>定義する</u>．これにより，「$\mathbb{K}^n$ の次元は n である」という直感に合う文章に厳密な定義を与えることができるようになる．詳細は以降の講義で扱う．

最後に，一次独立性と行列の正則性の関係について述べておこう．

系 4.5

n 次正方行列 P に対し，P の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにする (つまり，$P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$)．このとき，以下は同値である．

(1) P は正則．

(2) $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立．

証明． 定理 4.4 と，ランクと正則性の関係より，

$$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \text{は一次独立} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rank} P = n \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ は正則}$$

となるので示すべきことは示された． □

系 4.5 より，定理 2.3 の (1) と (2) の同値性は次のように言い換えられる．

系 4.6

n 次正方行列 A に対し，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A は一次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ を持つ．