線形代数 II 第 5 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

前回の講義で n 次正方行列の対角化可能性の判定，および対角化可能である場合の対角化を与える正則行列を求める手順について以下の事実を認めた上で解説を行った．

事実 4.1 (再掲, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

n 次正方行列 A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とする (ただし，$i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする)．すなわち，

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

であるとする．このとき，以下が成立する．

(1) 各 $i = 1, \ldots, k$ に対して，$1 \leq n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) \leq m_i$．すなわち，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は 1 以上 m_i 以下．

(2) ある $i = 1, \ldots, k$ が存在して，$n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) < m_i$ となるとき，A は対角化不可能である．

(3) 全ての $i = 1, \ldots, k$ に対して $n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) = m_i$ が成立するとき，A は対角化可能である．このとき，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が m_i なので，この解の全体はある $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \in \mathbb{C}^n$ を用いて，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)} + \cdots + c_{m_i}\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \mid c_1, \ldots, c_{m_i} \in \mathbb{C}\}$$

と書ける．この $\boldsymbol{p}_k^{(i)}$ らを並べて得られる n 次正方行列

$$P = (\underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(1)} \ \cdots \ \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}}_{m_1\text{個}} \ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(2)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}}_{m_2\text{個}} \ \cdots \ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(k)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)}}_{m_k\text{個}})$$

は正則である．ここで，$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ であることに注意する．

今回はこの事実の証明を行う．今回は抽象的な証明が続く回となるが，後のベクトル空間論に繋がる考え方が出てくる回でもあるので是非頑張ってついてきてもらいたい．

5.1 $\mathbb{K}^n$ の基底

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ である．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

まずは，$\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組に関する以下の重要な定理を証明しよう．

定理 5.1

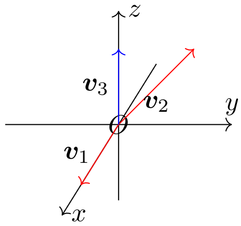
$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき，以下が成立する．

(1) $k \leq n$.

(2) $k < n$ のとき，ある $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{K}^n$ の n 個の一次独立な元となるようにできる．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

注意 1. 定理 5.1 は言葉で書くと，「$\mathbb{K}^n$ には最大でも n 個の元からなる一次独立な元の組しか存在せず，逆にどんな n 個未満の元からなる一次独立な元の組も適当に元を付け足して n 個の元からなる一次独立な元の組にできる」ということを述べている．このうち「最大でも n 個の元からなる一次独立な元の組しか存在せず」の部分は前回の定理 4.4 で示しているので，後半の主張が新しい部分である．この事実は例を考えると自然なものであることがわかる．例として $\mathbb{R}^3$ の一次独立な 2 つの元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えよう．このとき例えば，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとると，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が $\mathbb{R}^3$ の一次独立な元の組となる[*1]．



このように要するに “足りない方向” の元を追加することで，より大きな一次独立な元の組を作っていけるのである．そして “次元” に一致する数の一次独立な元が得られたところで “足りない方向” が無くなって元の追加が終了する．

定理 5.1 の証明.

(1) 定理 4.4 より，$\mathbb{K}^n$ においては $n+1$ 個以上の元からなる一次独立な元の組は存在しないが，これは (1) の主張に他ならない．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ に対して，

$$m := \max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{ある } \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_{k+\ell} \in \mathbb{K}^n \text{が存在して，} \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_{k+\ell} \text{は一次独立}\}$$

とおく[*2]．このとき，示すべきことは $m = n-k$ である．(1) より，$m \leq n-k$ であることはわかっているので，$m = n-k$ であることを示すためには，$m < n-k$ であると仮定して矛盾を導けばよい．

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_{k+m}$ を一次独立な $\mathbb{K}^n$ の元の組とする．m の最大性より，各 $j = 1, \dots, n$ に対し，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_{k+m}, \boldsymbol{e}_j$ は一次従属となる．よって，「全てが 0」ではないようなある $\widetilde{c}_{1,j}, \dots, \widetilde{c}_{k+m,j}, a_j \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$\widetilde{c}_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \widetilde{c}_{k+m,j}\boldsymbol{v}_{k+m} + a_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0} \tag{5.1}$$

となる．このとき，$a_j \neq 0$ である．なぜなら，もし $a_j = 0$ であったとすると，$\widetilde{c}_{1,j}, \dots, \widetilde{c}_{k+m,j}$ は「全てが 0」ではなく，

$$\widetilde{c}_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \widetilde{c}_{k+m,j}\boldsymbol{v}_{k+m} = \boldsymbol{0}$$

を満たすので $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k+m}$ が一次独立であるという仮定に矛盾するためである．これより $c_{i,j} := -\widetilde{c}_{i,j}/a_j$ とおくと，(5.1) において $a_j\boldsymbol{e}_j$ を移項した後，両辺を $-1/a_j$ 倍して，

$$c_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{k+m,j}\boldsymbol{v}_{k+m} = \boldsymbol{e}_j$$

となる．この式は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_{k+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{k+m,j} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_j \tag{5.2}$$

[*1] $|(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)| = 1$ であるため．系 4.5 参照．

[*2] $\max\{\dots\}$ は $\{\dots\}$ の元の中での最大値をとるという意味

となることを意味している．これより，$c_{i,j}$ を (i,j) 成分とする $(k+m)\times n$ 行列 $C=(c_{i,j})_{i=1,\dots,k+m,j=1,\dots,n}$ を考えると，(5.2) は

$$(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{k+m})C=(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n)=I_n \tag{5.3}$$

というようにまとめられる．ここで，n 個の未知数 $x_1,\dots,x_n$ に関する連立一次方程式

$$C\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{5.4}$$

を考える．このとき，両辺に左から $n\times(k+m)$ 行列 $(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{k+m})$ を掛けることで，

$$\begin{aligned}C\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\ &\Rightarrow (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{k+m})C\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{k+m})\mathbf{0}\\ &\Rightarrow I_n\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\quad ((5.3)\text{ より})\\ &\Rightarrow x_1=\cdots=x_n=0\end{aligned}$$

となる．これより，連立一次方程式 (5.4) の解の自由度は 0 なので，いま $n-\operatorname{rank}C=0$，つまり，$\operatorname{rank}C=n$ であることがわかる．ここで，$m<n-k$ とすると，$m+k<n$ なので，C の行の数が n より小さくなり，このとき $\operatorname{rank}C=n$ とはなりえない．これより，背理法から $m=n-k$ である． □

以下の性質も $\mathbb{K}^n$ における n 個の一次独立な元の組の重要な性質である．これは注意 1 の「“足りない方向” が無くなって」というイメージの部分を正確に述べた主張である．

定理 5.2

$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき，任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ に対し，ある $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{K}$ が存在して，

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$$

となる．

証明． $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組なので，系 4.5 より，これらを並べてできる行列

$$P=(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$$

は正則である．このとき，P を係数行列とする連立一次方程式

$$P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}$$

は解として，

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{v}=:\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

を持つ．すると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=P(P^{-1}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}.$$

□

定理 5.1, 5.2 から，$\mathbb{K}^n$ における$\underline{n\ 個}$の一次独立な元の組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は極大性 ($n+1$ 個以上の一次独立な元の組は $\mathbb{K}^n$ に存在しない)，および「それらの一次結合 ($c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ の形の元のこと) で $\mathbb{K}^n$ 全体が表せる」という特徴を持つ特別なものであると言える．

定義 5.3

$\mathbb{K}^n$ における$\underline{n\ 個}$の一次独立な元の組を $\mathbb{K}^n$ の**基底 (basis)** という．

注意 2. 後の講義でより一般の**ベクトル空間**における基底という概念を学ぶ．$\mathbb{K}^n$ はベクトル空間の最も典型的な例であり，定義 5.4 の基底は $\mathbb{K}^n$ のベクトル空間としての基底である．なお，基底という概念は普通は一次独立性と定理 5.2 の性質によって定義されるが，ここではわかりやすさのために単に元の個数で定義をした．

5.2　事実 4.1 の証明

本節では事実 4.1 を証明する．第 4 回講義資料注意 2 でふれたように事実 4.1 で $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ としているのは固有多項式が因数分解できることを保証するためだけで，それ以外では用いていないので，ここでも $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ として話を進める．まず，一つ便利な言葉を準備しておこう．

定義 5.4

A を n 次正方行列とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$V_A(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

と定義する．任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$\mathbf{0} \in V_A(\lambda)$ であることに注意する．さらに，$V_A(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることと λ が A の固有値であることは同値である．$V_A(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$ であるとき，$V_A(\lambda)$ を A の固有値 λ に対する**固有空間 (eigenspace)** という．固有空間 $V_A(\lambda)$ の $\mathbf{0}$ でない元は，A の固有値 λ に対する固有ベクトルに他ならない．

定理 5.5

A を n 次正方行列とし，$\lambda \in \mathbb{K}$ を A の固有値とする．このとき，固有空間 $V_A(\lambda)$ の $n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A)$ 個の元からなる一次独立な元の組をとることができ，かつ，$V_A(\lambda)$ の $n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A)$ 個よりも多い元からなる一次独立な元の組をとることはできない．すなわち，

$$\max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{ある } \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell \in V_A(\lambda) \text{ が存在して，} \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell \text{は一次独立 }\} = n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A)$$

である．

証明． まず，定義より $V_A(\lambda)$ は連立一次方程式

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解全体の成す $\mathbb{K}^n$ の部分集合であることに注意する．連立一次方程式の解に関する一般論より，上の連立一次方程式の解の自由度は $n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A) (\eqqcolon m)$ である．よって，ある $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{K}^n$ が存在して，

$$V_A(\lambda) = \{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}\} \tag{5.5}$$

と書け，さらに $(c_1, \ldots, c_m) \neq (c'_1, \ldots, c'_m)$ であれば，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m \neq c'_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c'_m\boldsymbol{p}_m$$

となるようにできる[*3]．このとき，この解の表示の一意性から特に

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m = \mathbf{0}$$

[*3] 後半の主張が不安な方は，連立一次方程式を行基本変形による係数行列の簡約化で解くアルゴリズムを思い出し，実際に $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$

となるのは $c_1 = \cdots = c_m = 0$ のときのみであることがわかるが，これは定義から $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ らが一次独立であるということである．よって，

$$\max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{ある } \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell \in V_A(\lambda) \text{ が存在して，} \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell \text{は一次独立}\} \geq m(= n - \mathrm{rank}(\lambda I_n - A)). \tag{5.6}$$

逆の不等号を示す．左辺の値を M とする．いま，定理 5.1 より，ある $\boldsymbol{p}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m, \boldsymbol{p}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底となるようにできる．一方，M の定義より，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M \in V_A(\lambda)$ で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M$ が一次独立なものが存在する．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M, \boldsymbol{p}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が一次独立となることを示す．ある $c_1, \ldots, c_M, d_{m+1}, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_M\boldsymbol{v}_M + d_{m+1}\boldsymbol{p}_{m+1} + \cdots + d_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{0} \tag{5.7}$$

となったと仮定する．このとき，命題 2.2 より $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_M\boldsymbol{v}_M \in V_A(\lambda)$ なので，(5.5) よりある $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_M\boldsymbol{v}_M = d_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + d_m\boldsymbol{p}_m$$

と書ける．このとき，(5.7) より，

$$d_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + d_m\boldsymbol{p}_m + d_{m+1}\boldsymbol{p}_{m+1} + \cdots + d_n\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{0}$$

となるが，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m, \boldsymbol{p}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立なので，このとき $d_1 = \cdots = d_m = d_{m+1} = \cdots = d_n = 0$. これを再び (5.7) に代入すると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_M\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{0}.$$

いま，仮定より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M$ は一次独立であったので，このとき $c_1 = \cdots = c_M = 0$. 以上から，(5.7) を仮定すると $c_1 = \cdots = c_M = d_{m+1} = \cdots = d_n = 0$ が導かれたので，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M, \boldsymbol{p}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組であることが分かった．これより，定理 5.1 (1) から，

$$M + (n - m) \leq n, \quad \text{すなわち，} \quad M \leq m$$

が導かれる．よって，(5.6) とあわせると $M = m$ がわかる． □

以上の準備のもとに，事実 4.1 の証明を行う．

5.2.1　事実 4.1 (2) の証明

まず事実 4.1 (2) を証明する．背理法で示す．n 次正方行列 A が対角化可能であるとすると，系 4.6 より一次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ が存在し，さらに各固有値 $\lambda_i \in \mathbb{K}^n$ の重複度 (=固有方程式の解としての重複度) が m_i であったので，定理 2.3, 定理 3.4 より，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ の中には固有値 λ_i に対応するもの (すなわち $V_A(\lambda_i)$ の元) が m_i 個あるということになる．しかし，ある i について $n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A) < m_i$ となるのであれば，定理 5.5 より，$V_A(\lambda_i)$ からは一次独立な m_i 個の元を選んでくることはできないということになる．これは矛盾なので，A はこのとき対角化不可能である． □

5.2.2　事実 4.1 (1) の証明

次に事実 4.1 (1) を証明する．定理 5.5 より，A の各固有値 $\lambda_i \in \mathbb{K}$ に対して，$n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A)$ は，$V_A(\lambda_i)$ からとってこられる一次独立な元の最大数であったということを思い出そう．まず，各 λ_i は A の固有値なので，対応する固有ベクトルは少なくとも 1 つは存在するから，$1 \leq n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A)$ は満たされる．次に $i = 1, \ldots, k$ を任意にとり，$n_i \coloneqq n - \mathrm{rank}(\lambda_i I_n - A)$ とする．$n_i \leq m_i$ を示せば良い．いま，$V_A(\lambda_i)$ からは一次独立な n_i 個の元を選んでくることができるので，それを $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n_i}$ と書く．さらに，定理 5.1 から，

をどのように求めたかを思い出せば良い．すると，解 $\boldsymbol{x}$ を $c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{p}_m$ の形で書いたとき，各 c_i $(i = 1, \ldots, m)$ が解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ のどこかの成分 x_{j_i} に一致するように $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ らが取れたということがわかるだろう．具体例については例えば第 1 回本レポート課題解答問題 6 補足解説を参照のこと．

ある $n-n_i$ 個の元 $\boldsymbol{p}_{n_i+1},\dots,\boldsymbol{p}_n\in\mathbb{K}^n$ を追加して，$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_{n_i},\boldsymbol{p}_{n_i+1},\dots,\boldsymbol{p}_n$ が一次独立となるようにできる ($\boldsymbol{p}_{n_i+1},\dots,\boldsymbol{p}_n$ は A の固有ベクトルとは限らない)．このとき，これらを並べて

$$P=(\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_{n_i}\ \boldsymbol{p}_{n_i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n)$$

とすると，系 4.5 より，これは正則行列である．さらに，行列の積の定義より，各 $j=1,\dots,n$ に対して，$P\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{p}_j$ なので ($\boldsymbol{e}_j$ は第 j 基本ベクトル)，両辺に P^{-1} を左から掛けて $\boldsymbol{e}_j=P^{-1}\boldsymbol{p}_j$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=P^{-1}(A\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_{n_i}\ A\boldsymbol{p}_{n_i+1}\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n)\\
&=P^{-1}(\lambda_i\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \lambda_i\boldsymbol{p}_{n_i}\ A\boldsymbol{p}_{n_i+1}\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n)\quad(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_{n_i}\in V_A(\lambda_i)\text{ なので})\\
&=(\lambda_iP^{-1}\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \lambda_iP^{-1}\boldsymbol{p}_{n_i}\ P^{-1}A\boldsymbol{p}_{n_i+1}\ \cdots\ P^{-1}A\boldsymbol{p}_n)\\
&=(\lambda_i\boldsymbol{e}_1\ \cdots\ \lambda_i\boldsymbol{e}_{n_i}\ P^{-1}A\boldsymbol{p}_{n_i+1}\ \cdots\ P^{-1}A\boldsymbol{p}_n)\\
&=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_iI_{n_i}&B_1\\\hline O&B_2\end{array}\right)
\end{aligned}$$

という形になる．ここで，B_1 はある $n_i\times(n-n_i)$ 行列，B_2 はある $n-n_i$ 次正方行列，O は $(n-n_i)\times n_i$ ゼロ行列である．よって，このとき命題 3.3 (4) より，A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t)&=\Phi_{P^{-1}AP}(t)=|tI_n-P^{-1}AP|\\
&=\left|\left(\begin{array}{c|c}tI_{n_i}-\lambda_iI_{n_i}&-B_1\\\hline O&tI_{n-n_i}-B_2\end{array}\right)\right|\\
&=(t-\lambda_i)^{n_i}\,|tI_{n-n_i}-B_2|\quad(\text{第 1 列目，第 2 列目,}\dots\text{と順に余因子展開して考えればよい})
\end{aligned}$$

となるので，特に $\Phi_A(t)$ は $(t-\lambda_i)^{n_i}$ で割り切れる t の多項式となる．しかし，因数分解の形から $\Phi_A(t)$ は最大でも m_i 回しか $(t-\lambda_i)$ で割り切れないので，$n_i\le m_i$ である． □

5.2.3　事実 4.1 (3) の証明

最後に事実 4.1 (3) を示す．定理 5.5 で，A の各固有値 $\lambda_i\in\mathbb{K}$ に対して，$V_A(\lambda_i)$ の $n-\mathrm{rank}(\lambda_iI_n-A)=m_i$ 個の元からなる一次独立な元の組 $\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ を取って来られることを示した．このとき，各 i に対するこれらの元をあわせて考えたもの，

$$\underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(1)}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}}_{m_1\text{個}}\ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(2)}\cdots\boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}}_{m_2\text{個}}\ \cdots\ \underbrace{\boldsymbol{p}_1^{(k)}\cdots\boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)}}_{m_k\text{個}}\tag{5.8}$$

が $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組となることを示せば，これが固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底となり，系 4.6 より，A の対角化可能であることがわかる ($m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ に注意)．このためには，実は以下の定理を示せば十分である．

定理 5.6

$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k\in\mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

定理 5.6 から (5.8) の一次独立性が従うこと． ある $c_i^{(j)}\in\mathbb{K}$ $(i=1,\dots,m_j,j=1,\dots,k)$ が存在して，

$$c_1^{(1)}\boldsymbol{p}_1^{(1)}+\cdots+c_{m_1}^{(1)}\boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}+c_1^{(2)}\boldsymbol{p}_1^{(2)}+\cdots+c_{m_2}^{(2)}\boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}+\cdots+c_1^{(k)}\boldsymbol{p}_1^{(k)}+\cdots+c_{m_k}^{(k)}\boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)}=\boldsymbol{0}$$

となったと仮定する．このとき，命題 2.2 より，各 $j=1,\dots,k$ に対して，

$$\boldsymbol{p}_j\coloneqq c_1^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+\cdots+c_{m_j}^{(j)}\boldsymbol{p}_{m_j}^{(j)}\in V_A(\lambda_j)$$

となるので，定理 5.6 から，$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．いま，$\boldsymbol{p}_1+\cdots+\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}$ であるが，一次独立性より $\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k$ の中に一つでも $\boldsymbol{0}$ でないものが存在すれば矛盾する．よって，$\boldsymbol{p}_1=\cdots=\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{0}$．よって，各 $j=1,\dots,k$ に対して，

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{p}_j=c_1^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+\cdots+c_{m_j}^{(j)}\boldsymbol{p}_{m_j}^{(j)}$$

であるが，いま $\boldsymbol{p}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_j}^{(j)}$ は一次独立に取っているので，このとき $c_1^{(j)} = \cdots = c_{m_j}^{(j)} = 0$．以上より $c_i^{(j)} = 0$ $(i = 1, \ldots, m_j, j = 1, \ldots, k)$ が示されたので，(5.8) は一次独立である． □

定理 5.6 の証明． $\boldsymbol{p}_i$ に対応する固有値を λ_i と書く．つまり，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

とする．このとき仮定から，$i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であることに注意する．いま，$c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0} \tag{5.9}$$

が成立すると仮定する．このとき，$c_1 = \cdots = c_k = 0$ となることを示せばよい．(5.9) の両辺に左から A をかけると，

$$c_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0}，\text{つまり，} c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}.$$

となる．次に，今得られた式の両辺にさらに左から A をかけると，

$$c_1\lambda_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0}，\text{つまり，} c_1\lambda_1^2\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^2\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}.$$

このように，得られた式にさらに左から A をかけるという操作を上のように $k-1$ 回繰り返すと，

$$c_1\lambda_1^i\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^i\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{5.10}$$

が得られる．(5.10) は行列を用いて次のようにまとめてあらわすことができる．

$$\begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{p}_1 & c_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & c_k\boldsymbol{p}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = O. \tag{5.11}$$

(O は k 次正方ゼロ行列．) ここで，ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant) の公式より，

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

となる[*4]．ここで，いま仮定から $i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であったので，上のファンデルモンド行列式の値は 0 ではない．よって，$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するので，これを (5.11) の両辺に右からかけて，

$$\begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{p}_1 & c_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & c_k\boldsymbol{p}_k \end{pmatrix} = O.$$

いま，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は固有ベクトルなので特にゼロベクトルではないから，このとき $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$．よって，示すべきことは示された． □

(以下はややテクニカルな話なので，興味のある方向け．似た議論は先の線形空間論に入った後でも再度扱うので，混乱しそうな方は今は飛ばしても良い．)

[*4] この公式の証明をここですると寄り道が長くなるのでここでは行わない．別途配布する補足プリントを参照のこと．

事実 4.1 (3) の証明は厳密には実はまだ終わっていない．なぜなら，「各 $V_A(\lambda_i)$ から m_i 個の元からなる一次独立な元の組を取ってこられる」ことは証明したが，事実 4.1 (3) の主張にあるように，$(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の全体 (すなわち $V_A(\lambda_i)$) をある $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \in \mathbb{K}^n$ を用いて，

$$V_A(\lambda_i) = \{c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)} + \cdots + c_{m_i}\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)} \mid c_1, \ldots, c_{m_i} \in \mathbb{K}\}$$

と表したとき，この $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ が一次独立になるとは言っていないからである．すなわち，あとはこのような $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ が自動的に一次独立になるということを示す必要がある．このためには，以下の一般的な事実を示せば良い．

定理 5.7

B を $\operatorname{rank} B < n$ を満たす $m \times n$ 行列とし，n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad (\text{ただし，} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

を考える．このとき，この方程式の解の全体が $k := n - \operatorname{rank} B (> 0)$ 個のベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k \in \mathbb{K}^n$ を用いて，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

と書けたとすると，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

証明. 背理法で示す．$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ が一次従属であると仮定して矛盾を導く．このとき，「全てが 0」ではない $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$d_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + d_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}$$

となる．ここで，$d_k \neq 0$ と仮定して一般性を失わない．このとき，

$$\boldsymbol{p}_k = -\frac{d_1}{d_k}\boldsymbol{p}_1 - \cdots - \frac{d_{k-1}}{d_k}\boldsymbol{p}_{k-1}$$

となるので，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の全体は，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1} + c_k\boldsymbol{p}_k \mid c_1, \ldots, c_{k-1}, c_k \in \mathbb{K}\} = \{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1} \mid c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{K}\}$$

となる ($c_k\boldsymbol{p}_k$ の部分は他の $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ を用いて表せてしまう)．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ が一次従属であればここまでと同じ議論を繰り返して (必要があれば $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ の添え字を付け替えることで)，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{p}_{k-1} \mid c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{K}\} = \{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-2}\boldsymbol{p}_{k-2} \mid c_1, \ldots, c_{k-2} \in \mathbb{K}\}$$

とできる．いま $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度 $n - \operatorname{rank} B$ は 1 以上であるから解の全体は $\boldsymbol{0}$ 以外の元を含むので，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ の少なくとも 1 つ以上は $\boldsymbol{0}$ でないから，上の議論を繰り返すと，どこかで一次独立な元の組が得られて繰り返しが終了する (一次従属であればどんどん元を取り除けるが全てが取り除かれるということはない)．すなわち，必要があれば $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ の添え字を付け替えることで，ある $1 \leq s \leq k-1$ が存在して，一次独立な $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s$ によって，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の全体は，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{p}_s \mid c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{K}\}$$

と表示される．すると，定理 5.1 より，ある $n-s$ 個の $\mathbb{K}^n$ の元 $\boldsymbol{q}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が存在して，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s, \boldsymbol{q}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底となるようにできる．

一方，定理 5.5 の証明の冒頭および注釈で，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の全体はある一次独立な $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_k \in \mathbb{K}^n$ を用いて，

$$\{c_1\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{\ell}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

という形で書けることを説明した．ここで，$\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_k, \boldsymbol{q}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が一次独立となることを示す[*5]．ある $a_1, \ldots, a_k, b_{s+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$a_1\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{\ell}_k + b_{s+1}\boldsymbol{q}_{s+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{q}_n = \mathbf{0} \tag{5.12}$$

となったと仮定する．このとき，$a_1\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{\ell}_k$ は $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解なので，$b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$a_1\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{\ell}_k = b_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{p}_s$$

と書ける．このとき，(5.12) より，

$$b_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + b_s\boldsymbol{p}_s + b_{s+1}\boldsymbol{q}_{s+1} + \cdots + b_n\boldsymbol{q}_n = \mathbf{0}$$

となるが，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s, \boldsymbol{q}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は一次独立なので，このとき $b_1 = \cdots = b_s = b_{s+1} = \cdots = b_n = 0$．これを (5.12) に代入すると，

$$a_1\boldsymbol{\ell}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{\ell}_k = \mathbf{0}.$$

いま，$\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_k$ は一次独立であったので，このとき $a_1 = \cdots = a_k = 0$．以上から，(5.12) を仮定すると $a_1 = \cdots = a_k = b_{s+1} = \cdots = b_n = 0$ が導かれたので，$\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_k, \boldsymbol{q}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組であることが分かった．これより，定理 5.1 (1) から，

$$k + (n - s) \leq n, \quad \text{すなわち，} \quad k \leq s$$

が導かれるが，これは $1 \leq s \leq k - 1$ に矛盾．以上より，背理法から $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ が一次独立であることが示された． □

注意 3 ($\operatorname{rank} A$ の定義について)．定理 5.7 の証明は「$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の全体が $1 \leq s < n - \operatorname{rank} B$ なる s 個の元を用いて $\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{p}_s \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$ と書けたとすると矛盾する」という証明になっている．実際，以下の主張が同様の証明で証明できる (詳細は是非各自考えてみて貰いたい)．

系 5.8

B を $m \times n$ 行列とし，n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad (\text{ただし，} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$$

を考える．このとき，この方程式の解の全体がある $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k \in \mathbb{K}^n$ を用いて，

$$\{c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

と書けたとすると，$k \geq n - \operatorname{rank} B$ である．さらに，$k > n - \operatorname{rank} B$ であるとき，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ から適当に $n - \operatorname{rank} B$ 個の元を選ぶことで，その一次結合で $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の全体を表示することができる．このとき，選んだ $n - \operatorname{rank} B$ 個の元は一次独立な元の組となる．

系 5.8 は連立一次方程式の「自由度」という概念が問題なく定まるということを主張している．これまで，$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体をあるベクトルらの一次結合で表示するのに必要なベクトルらの個数の最小数 (すなわち解をベクトル表示する際の最小パラメータ数) を「解の自由度」と呼んでいたが，これまで行ってきた「係数行列の行基本変形による簡約化を用いるアルゴリズム」によって得られる連立一次方程式の一般解に含まれるパラメータ数が本当に最小なのか (もっと別の解き方があってそうするともっとパラメータ数の少ない解の表示が得られるのではないか) ということについては細かく考えてこなかった．しかし，系 5.8 は「係数行列の行基本変形による簡約化を用いるアルゴリズム」によって得られる連立一次方程式の一般解に含まれるパラメータ数が本当に最小であるということを述べているのである．

[*5] 以降の証明は定理 5.5 の証明とほぼ並行している．

では，$\operatorname{rank} B$ とはどういう定義だっただろうか．これは行基本変形で B を簡約化したときに 0 以外の成分が残る行の数であった．しかし，ここでも本当は「どんな手順で簡約化してもいつも同じ行数が残るのか」ということが問題になってくる．そこで，「どんな手順で簡約化してもいつも同じ行数が残る」ということを連立一次方程式の自由度を用いて保証してみよう．$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度を f_B と書いたとき，この値は B に対して問題無く定まるということを上に述べた．この値を用いて，逆に

$$\operatorname{rank} B \coloneqq n - f_B$$

と定義してみる．このとき，$\operatorname{rank} B$ は B のみによって定まる値であることがわかる．そこで，B がある行基本変形によって，最後にゼロでない行が r 行残る簡約階段行列になったとしよう．このとき，連立一次方程式を解くアルゴリズムから，$n-r$ 個のベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-r}$ を用いて $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解はベクトル表示され，さらに，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{p}_{n-r}$$

は $(c_1, \ldots, c_{n-r})$ が異なれば別の解を表すというようにできる．すなわち，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-r}$ から 1 つでもベクトルを取り除けば表示できない解がある．よって，5.8 の後半の主張から，このとき，$n - r = f_B$ である．すなわち，

$$r = n - f_B = \operatorname{rank} B$$

である．これは B がある行基本変形によって，最後にゼロでない行が r 行残る簡約階段行列になったとするとそれは必ず B のみから定まる値 $\operatorname{rank} B$ になるということを示している．これより，どんな手順で B を簡約会談行列にしても最後には同じ数のゼロでない行が残る (すなわちこれまでの定義の $\operatorname{rank} B$ が「問題無く定まる」値である) ということが示された[*6]．

[*6] さらに注意深い方は，系 5.8 の主張中や証明で用いる定理 5.1 の証明中で「rank」や「解の自由度」という言葉を用いているので，系 5.8 を証明してから rank や自由度の正確な定義を議論するのは循環していておかしいのではないかと思われるだろう．この心配については，系 5.8 の「$n - \operatorname{rank} B$」の部分を，「$B$ に対して定まるある非負整数 f_B」に置き換えれば良い (これは B を行基本変形で簡約化して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解いたときに含まれるパラメータ数とすれば良い)．定理 5.1 の証明については実質的に「一般の $k \times \ell$ 行列 C に対して，$C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解が $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみであることと，C がある行基本変形の繰り返しで $\begin{pmatrix} I_\ell \\ \hline O \end{pmatrix}$ という形にできることが同値である」という事実しか用いていない (「C がある行基本変形の繰り返しで $\begin{pmatrix} I_\ell \\ \hline O \end{pmatrix}$ という形にできる」ということを「$\operatorname{rank} C = \ell$」と暫定的に定義すれば証明は機能している)．この事実は「rank」や「解の自由度」という言葉がきちんと定式化されていなくても，これ単独で証明ができるので (考えてみて欲しい)，この事実を証明した後，定理 5.1 を証明し，その後系 5.8 を証明し，その後上のように「rank」や「解の自由度」を定義したと考えれば良い