線形代数 II 第 7 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

次回，実対称行列，およびエルミート行列と呼ばれる特別な行列の対角化について，これまでよりもさらに詳細なことを解説する．そのための準備として，今回は $\mathbb{K}^n$ における**内積**と**正規直交基底**について解説を行う．さらに，基底から正規直交基底を得るアルゴリズムを与える**グラム・シュミットの直交化法**について解説を行う．

7.1 $\mathbb{K}^n$ における内積と正規直交基底

$\mathbb{R}^2$ という平面内あるいは $\mathbb{R}^3$ という空間内のベクトルには "大きさ" や "直交性" という概念が自然に定まっており，空間内の対象の幾何的な取り扱いを可能にしていた．例えば，ある点と直線の距離はその点を始点として，終点が直線上にあるような直線に直交するベクトルを取って，その大きさを測れば求められる．

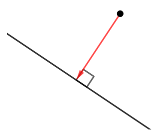


図 1: 赤いベクトルの大きさが点と直線の距離

$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ であればこういった概念は直感的にも定義できるが，一般の $\mathbb{K}^n$ に話を拡張するために定義を抽象化したい．このためには**内積**というものを用いることになる*1．

定義 7.1

$\mathbb{K}^n$ の 2 元 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ に対し，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} := {}^t\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = \begin{cases} v_1w_1 + \cdots + v_nw_n & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ のとき,} \\ \overline{v_1}w_1 + \cdots + \overline{v_n}w_n & \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ のとき,} \end{cases}$$

とする．ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である ($a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$)．また，${}^t\overline{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ の各成分の複素共役を取ったベクトルを転置した $1 \times n$ 行列 (すなわち ${}^t\overline{\boldsymbol{v}} = (\overline{v_1} \ \cdots \ \overline{v_n})$) を表しており，${}^t\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w}$ は $1 \times n$ 行列と $n \times 1$ 行列の通常の積の意味である (結果として現れる 1×1 行列を単にスカラー $\mathbb{K}$ の元と考えている)．
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，この写像 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}}$ を**内積 (inner product)** と呼び，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，この写像 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}}$ を**エルミート内積 (Hermitian inner product)** と呼ぶ．ただし，本講義では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のとき，これらの写像 $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}$ をどちらも単に **$\mathbb{K}^n$ の内積**と呼ぶことにする．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 ここまで，"進んで勉強している方は $\mathbb{K}$ を一般の体 (field) として良い" として話を進めてきたが，内積が関係する議論についてはある内積の値が正になることを使う部分や，大きさを定義する際にルートをとるという操作が入る部分があるので一般の体では通用しないところがある．このため，本節以降は $\mathbb{K}$ は "本当に"$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であると思って読んでいただきたい．

注意 1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{R}}=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$ であるが，$x\in\mathbb{R}$ に対しては $\overline{x}=x$ なので，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときも

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{R}}=\overline{v_1}w_1+\cdots+\overline{v_n}w_n$$

と書いて間違いではない (少々奇妙だが…)．このため，以下では $\mathbb{K}^n$ における内積を常に，

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=\overline{v_1}w_1+\cdots+\overline{v_n}w_n$$

と書くことにする．これは $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときと $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のときで毎回場合分けして証明などを記述する必要が無いようにするための工夫である．

以下は内積の基本性質である．(1), (2) の性質はあわせて第 1 成分に関する**共役線形性**，第 2 成分に関する**線形性**と呼ばれ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときこれらはまとめて**双線形性**と呼ばれる)，性質 (3) は**エルミート対称性** ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき単に**対称性**) と呼ばれ，性質 (4) は**正定値性**と呼ばれる．

命題 7.2

$\mathbb{K}^n$ の内積は以下を満たす．

(1) 任意の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{K}^n$ に対し，

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}},\quad (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}.$$

(2) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{K}^n$，$c\in\mathbb{K}$ に対し，

$$(c\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=\overline{c}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}},\quad (\boldsymbol{v},c\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=c(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}.$$

(3) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{K}^n$ に対し，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}=\overline{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}}$.

(4) 任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ に対し，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}\geq 0$，さらに，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}=0$ ならば $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

なお，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときは，$x\in\mathbb{R}$ に対して，$\overline{x}=x$ なので，上にある複素共役は全て無視して良い．(例えば，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\mathbb{R}}=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})_{\mathbb{R}}$ 等).

証明. (1), (2), (3) の証明は容易なので省略する (各ベクトルを成分表示すれば直ちにわかる)．(4) の証明も難しくないが，大事なのでここで解説する．任意の $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ に対して，

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}=\overline{v_1}v_1+\cdots+\overline{v_n}v_n\geq 0$$

である．ここで，$z=a+bi\in\mathbb{C}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ に対し，$\overline{z}z=(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2(=|z|^2)\geq 0$ であり，等号成立は $z=0$ のときのみであることに注意すると，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}=0$ となるのは，全ての $i=1,\ldots,n$ に対して $\overline{v_i}v_i=0$ となるときであり，こうなるのは全ての $i=1,\ldots,n$ に対して $v_i=0$ のときのみであることがわかる．これより，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}=0$ ならば $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であることがわかる． □

注意 2. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のときに，内積を $v_1w_1+\cdots+v_nw_n$ ではなく $\overline{v_1}w_1+\cdots+\overline{v_n}w_n$ と定義したのは，命題 7.2 の (4) の性質を得るためである．複素共役を付けないとすると，例えば $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ に対して，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積が

$$1^2+i^2=1-1=0$$

という計算になってしまい，自分自身との内積の値が 0 であるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトルができてしまう．すぐ下で $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\mathbb{C}}$ の値を用いて $\boldsymbol{v}$ の大きさを定義するが，これだと大きさが 0 であるような $\boldsymbol{0}$ でないベクトルがあるように見え，“大きさ” という言葉の表す直感とは相性の良くない定義であることがわかるだろう．他にも

$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{C}}$ が大きさと関係していて欲しいと考えると，その値は 0 以上の実数になっていて欲しいところであるが，複素共役を付けないと，$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対して，$\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{w}$ の内積が

$$1^2 + (1+i)^2 = 1 + 2i$$

という計算になって値が複素数になることがあり，やはり欲しい性質は持っていない．

複素共役を付けたエルミート内積では，上の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対してそれぞれ，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{C}} &= 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i = 1 + 1 = 2 \\ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}} &= 1 \cdot 1 + (1-i) \cdot (1+i) = 1 + 2 = 3\end{aligned}$$

というようにちゃんと 0 以上の実数値が出る．

注意 3. 本によっては，$\mathbb{C}^n$ の内積の定義を，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}} = v_1\overline{w_1} + \cdots + v_n\overline{w_n}$$

にしているものもある．この場合，命題 7.2 の (1)，(3)，(4) は全く同様に成立し，(2) は

(2)$'$ 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$，$c \in \mathbb{C}$ に対し，$(c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}} = c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}}$，$(\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w})_{\mathbb{C}} = \overline{c}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{C}}$.

に変わる．

定義 7.3

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}}$ を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．命題 7.2 (4) より，これは 0 以上の実数である．
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という．
- $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{K}^n$ が，

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)_{\mathbb{K}} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

を満たすとき，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の**正規直交基底**という．つまり，正規直交基底とは，各元の大きさが全て 1 で，互いに直交する n 個の元からなる $\mathbb{K}^n$ の元の組のことである．

注意 4. $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ においてベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ のなす角を θ とすると，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{R}} = \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\| \cos\theta$$

であった．これは高校で学んだ内容であろう．一般に $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = 0$ で直交性を定義するのは，この話と整合的である ($\theta = \pi/2$ のとき，$\cos\theta = 0$)．なお，命題 7.2 (3) より，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = 0$ のとき，$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}} = 0$ でもあることに注意する．

命題 7.4

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底とする．このとき，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底である．すなわち，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は一次独立である．

証明. ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

となったと仮定する．このとき，$i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\begin{aligned}0 = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{0})_{\mathbb{K}} &= (\boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n)_{\mathbb{K}} \\ &= c_1(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_1)_{\mathbb{K}} + \cdots + c_n(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_n)_{\mathbb{K}} \quad (\text{命題 7.2 (1), (2) より}) \\ &= c_i \quad (\text{正規直交基底の定義より}).\end{aligned}$$

これより，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は一次独立であり，n 個の元からなるので $\mathbb{K}^n$ の基底である． □

例 1. 注意 2 での計算より，

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{C}}} = \sqrt{2}$$
$$\left\|\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{C}}} = \sqrt{3}$$

である．

例 2. $\begin{pmatrix}-1\\2i\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ は直交する．実際，

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{C}} = (-1)\cdot 1 + (-2i)\cdot i + 1\cdot(-1) = -1+2-1 = 0$$

となる．

例 3. $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底である ($\boldsymbol{e}_i$ は第 i 基本ベクトル)．

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)_{\mathbb{K}} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき，} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき，} \end{cases}$$

は容易に確かめられる．これが，正規直交基底の最も標準的な例であり，一般の正規直交基底は幾何的に "$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に似た" 基底だと考えれば良い．

例 4. $\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．実際，

$$\left\|\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right\| = 1$$
$$\left(\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = 0$$

となる (命題 7.2 (3) にも注意)．

正規直交基底は直交行列・ユニタリ行列と以下のように対応している．

命題 7.5

(I) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．n 次実正方行列 A に対し，A の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ と書くことにする (つまり，$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$)．このとき，以下は同値である．
  (1) A は**直交行列**である．つまり，${}^tAA = I_n$．
  (2) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底．

(II) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．n 次複素正方行列 A に対し，A の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ と書くことにする．このとき，以下は同値である．
  (1) A は**ユニタリ行列**である．つまり，$A^*A = I_n$．ここで，A^* は A の随伴行列，すなわち，$A^* := {}^t\overline{A}$ (A を転置し，各成分の複素共役をとったもの) である．
  (2) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底．

証明. (II) を示す．(I) は以下の議論で複素共役を全て無視すれば良い．n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ に対して，A^* の (i,j) 成分が $\overline{a_{ji}}$ であることに注意すると，積 A^*B の (i,j) 成分は，

$$\overline{a_{1i}}b_{1j} + \cdots + \overline{a_{ni}}b_{nj} = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)_{\mathbb{C}}$$

ここで，$\boldsymbol{a}_i$ は A の i 列目の列ベクトル，$\boldsymbol{b}_i$ は B の i 列目の列ベクトルである．これより，

$$A^*A = I_n \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)_{\mathbb{C}} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i \neq j \text{ のとき}, \end{cases}$$

となるので (II) は示された． □

例 5. 例 4 の正規直交基底の元を並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

は直交行列である．実際，

$${}^tAA = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

$\mathbb{K}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が与えられたとき，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ はある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ を用いて，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書けるのであった (定理 5.2)．ここで $\boldsymbol{v}$ が与えられた時に実際にこれを満たす $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ を求めるには，連立一次方程式

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} \tag{7.1}$$

を解く必要がある．しかし，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が正規直交基底であるときは，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ は連立一次方程式 (7.1) を解かなくても[*2]内積を用いて以下のように簡単に求められる．

命題 7.6

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底とする．$\mathbb{K}^n$ の元 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

と書けるのであれば，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$c_i = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}$$

である．

証明. 以下の計算からわかる．

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}} &= (\boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n)_{\mathbb{K}} \\ &= c_1(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_1)_{\mathbb{K}} + \cdots + c_n(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_n)_{\mathbb{K}} \quad (\text{命題 7.2 (1), (2) より}) \\ &= c_i \quad (\text{正規直交基底の定義より}). \end{aligned}$$

[*2] ここで，「連立一次方程式 (7.1) を解かなくても」というのは本当は少し変である．$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が正規直交基底であるとき，命題 7.5 から係数行列 $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)$ が $A^*A = I_n$，つまり，$A^{-1} = A^*$ をみたす．よって，このとき (7.1) が

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{v} = A^*\boldsymbol{v}$$

というように "簡単に解ける" のである (右辺の $\mathbb{K}^n$ の元の第 i 成分が定義から $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}$ に等しい)．すなわち，「連立一次方程式 (7.1) を解かなくても」と書いたのは，「行基本変形を用いたアルゴリズムで連立一次方程式 (7.1) を解かなくても」の意味である．

$\square$

例 6. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を例 4 の正規直交基底によって表す方法を命題 7.7 を用いて与える．

$$\left(\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$
$$\left(\begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$
$$\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}} = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

となることより，

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} + (2-\sqrt{2})\begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix} + (2+\sqrt{2})\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}$$

である．

少し寄り道になるが，この考え方を発展させて以下のようなこともできる．

命題 7.7

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} \subset \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底とする．各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$P_i \coloneqq \boldsymbol{u}_i {}^t\overline{\boldsymbol{u}_i}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{u}_i$ は $n \times 1$ 行列，${}^t\overline{\boldsymbol{u}_i}$ は $1 \times n$ 行列なので，P_i は n 次正方行列である．このとき，以下が成立する．

(1) 全ての i に対し，$P_i^2 = P_i$ かつ $P_i^* = P_i$．

(2) 任意の $i \neq j$ に対し，$P_i P_j = O$．ここで，O は n 次ゼロ行列．

(3) $\mathbb{K}^n$ の元 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{u}_n$$

と書けるのであれば，全ての i に対し，

$$P_i \boldsymbol{v} = c_i \boldsymbol{u}_i.$$

(4) $I_n = P_1 + \cdots + P_n$.

注意 5．命題 7.7 (3) から P_i を掛けるという操作は "$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}_i$ 方向成分を取り出す" という操作になっていることがわかる．この操作を $\boldsymbol{u}_i$ 方向への**射影**という．また，$P_i\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}_i$ 方向への**正射影**という．

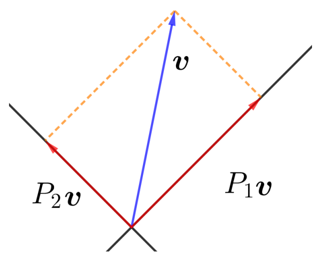
イメージをつかむために小さな例を見てみよう．例えば，$\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．このとき，

$$P_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}(1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$
$$P_2 = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}(-1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

である．このとき，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$P_1\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \quad P_2\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

であるが，これは以下のように図示される．



なお，命題 7.7 のその他の性質

$$P_1^2 = P_1,\ P_1^* = P_1,\ P_2^2 = P_2,\ P_2^* = P_2,\ P_1P_2 = P_2P_1 = O,\ I_2 = P_1 + P_2$$

も全て容易に確認できる．

命題 7.7 の証明．

(1) 以下の計算よりわかる．

$$\begin{aligned} P_i^2 &= \boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i} \\ &= \boldsymbol{u}_i((\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)_{\mathbb{K}})^t\overline{\boldsymbol{u}_i} \quad (\text{内積の定義より}) \\ &= \boldsymbol{u}_i(1)^t\overline{\boldsymbol{u}_i} = \boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i} = P_i. \\ P_i^* &= {}^t\overline{(\boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i})} = {}^t(\overline{\boldsymbol{u}_i}{}^t\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i} = P_i. \end{aligned}$$

(2) 以下の計算よりわかる．

$$\begin{aligned} P_iP_j &= \boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{u}_j{}^t\overline{\boldsymbol{u}_j} \\ &= \boldsymbol{u}_i((\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)_{\mathbb{K}})^t\overline{\boldsymbol{u}_j} \quad (\text{内積の定義より}) \\ &= \boldsymbol{u}_i(0)^t\overline{\boldsymbol{u}_i} = \boldsymbol{0}^t\overline{\boldsymbol{u}_j} = O. \end{aligned}$$

(3) 以下の計算よりわかる．

$$\begin{aligned} P_i\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u}_i{}^t\overline{\boldsymbol{u}_i}\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{u}_i((\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}) \quad (\text{内積の定義より}) \\ &= (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}\boldsymbol{u}_i = c_i\boldsymbol{u}_i. \quad (\text{命題 7.7より}) \end{aligned}$$

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

と書けるが，(3) より，

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = P_1\boldsymbol{v} + \cdots + P_n\boldsymbol{v} = (P_1 + \cdots + P_n)\boldsymbol{v}.$$

全ての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対して $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ となる n 次正方行列 A は単位行列 I_n のみなので，$P_1 + \cdots + P_n = I_n$． □

7.2 グラム・シュミットの直交化法

最後に，$\mathbb{K}^n$ の基底が与えられた場合に，そこから $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底を得る方法について学ぶ．これは，**グラム・シュミットの直交化法**と呼ばれる方法である．正規直交基底を作ろうと思ったときに本質的な部分は，「互いに直交する n 個の元を作る」という部分である．それさえできてしまえば，「各元の大きさを 1 にする」という部分は，各元を適当にスカラー倍して大きさを調整すれば良いだけなので容易である．よって，良く理解するべき部分は「如何にして一般の基底から互いに直交する n 個の元を作るか」というところである．一般的な方法は後に回して，例で考えよう (この例は一般的な状況を十分に説明している)．

例 7. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ という $\mathbb{R}^3$ の部分集合は $\mathbb{R}^3$ の基底となる[*3]．ここから正規直交基底を作ってみよう．

$$\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．まず，

$$\boldsymbol{u}'_2 \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく．すると，命題 7.2 (1), (2) より，

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}} = \left(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_1 \right)_{\mathbb{R}} = (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}} - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}} = (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}} - (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{R}} = 0$$

となるので，$\boldsymbol{u}'_1$ と $\boldsymbol{u}'_2$ は直交する．次に，

$$\boldsymbol{u}'_3 \coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-7/2}{3/2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

とする．すると，命題 7.2 (1), (2) と $(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}} = (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}} = 0$ より，

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_3)_{\mathbb{R}} &= \left(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_2 \right)_{\mathbb{R}} \\
&= (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}} - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}} (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}} \\
&= (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} - (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} - 0 = 0, \\
(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3)_{\mathbb{R}} &= \left(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}} \boldsymbol{u}'_2 \right)_{\mathbb{R}} \\
&= (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}}} (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{R}} - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}}} (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{R}} \\
&= (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} - 0 - (\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{R}} = 0
\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{u}'_3$ は $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ と直交する．以上より，$\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$ は互いに直交する $\mathbb{R}^3$ の 3 つの元である．よって，後はそれぞれの元の大きさが 1 になるようにスカラー倍で調整すれば正規直交基底が得られるが (それぞれをスカラー倍しても命題 7.2 (2) より，直交性は失われないことに注意)，そのためには，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} \boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, 2, 3$$

とすればよい．なぜなら，このとき

$$\|\boldsymbol{u}_k\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k)_{\mathbb{R}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} \boldsymbol{u}'_k, \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} \boldsymbol{u}'_k \right)_{\mathbb{R}}} = \sqrt{\frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|^2} (\boldsymbol{u}'_k, \boldsymbol{u}'_k)_{\mathbb{R}}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} \sqrt{(\boldsymbol{u}'_k, \boldsymbol{u}'_k)_{\mathbb{R}}} = \frac{\|\boldsymbol{u}'_k\|}{\|\boldsymbol{u}'_k\|} = 1$$

となるためである．具体的に求めると，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{4/3}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となり，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

[*3] $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$ であることからわかる．

例 7 の方針の「気持ち」は言葉で書くと以下のようにまとめられる：

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ という一次独立なベクトルが与えられたとき，

1) まず，$\boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1$ の定数倍を適切に引くことで“直交性における余分”を削り，$\boldsymbol{u}'_1$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_2$ を作る．
2) 次に，$\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ の定数倍を適切に引くことで“直交性における余分”を削り，$\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_3$ を作る．
3) 次に，$\boldsymbol{v}_4$ から $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$ の定数倍を適切に引くことで“直交性における余分”を削り，$\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_4$ を作る．

$\dots$

$n-1$) 次に，$\boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_{n-1}$ の定数倍を適切に引くことで“直交性における余分”を削り，$\boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_{n-1}$ と直交する元 $\boldsymbol{u}'_n$ を作る．

n) ここまでのステップで，互いに直交する n 個の元が作れて，後は，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

として，すべての元の大きさを 1 に調整すれば，$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ が正規直交基底である．

このアルゴリズムを厳密な式の形で述べておこう．ただし，これで本当に正規直交基底が得られるということの厳密な証明は補足プリントに回すことにする．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram–Schmidt orthonormalization)

$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，以下の方法で B から $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}'_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1, \\
\boldsymbol{u}'_3 &\coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_2, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}'_k &\coloneqq \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}_k)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{u}'_i)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_i, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &\coloneqq \boldsymbol{v}_n - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1}, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_{n-1}, \boldsymbol{u}'_{n-1})_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底となる．

ここで，グラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムから以下もわかる．

定理 7.8

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の大きさ 1 の元とする．このとき，ある $n-1$ 個の元 $\boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{K}^n$ が存在して，$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の正規直交基底となるようにできる．

証明. 定理 5.1 より，ある $n-1$ 個の元 $\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{K}^n$ が存在して，$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底となるよ

うにできる．そこで，$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，上記のグラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムを適用すると，正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が得られるが，直交化法のアルゴリズムより，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} = \frac{1}{1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

となる ($\boldsymbol{u}$ の大きさが 1 であることに注意)．よって，求める正規直交基底が得られた． □