# 線形代数 II 第 9 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

## 9.1　導入

今回からはベクトル空間 (= 線形空間) の理論の基礎を学ぶ．ベクトル空間はこれまで扱ってきた $\mathbb{K}^n$ の抽象化であり，この抽象化によって，様々な空間に対してこれまでに学んだ $\mathbb{K}^n$ での理論が適用できるようになる．ここで線形代数の応用範囲が一気に広がってゆくと同時に，これまで学んで来た理論についても見通しの良いとらえ方ができるようになる．

アイデアを簡単に説明しよう．$\mathbb{K}^n$ とは基本ベクトルからなる標準的な基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ を備えた "標準基底付き空間" である．任意の点は座標を用いて表すことができるが，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

なので，座標というのは元を標準基底の線形結合で書いた時の係数の情報に他ならない．我々はいつも標準基底を基準にして空間内の点を表していたのである．しかし，我々が既に対角化の勉強で見てきたように，初めから備わっている標準基底はいつでも便利なわけではない．例えば，$n$ 次正方行列 $A$ が対角化可能であることと $A$ の固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底が存在することは同値であることを見たが，もし $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $A$ の固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底であれば，

$$A(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = x_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_nA\boldsymbol{v}_n = x_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n$$

というように $A$ を掛けるという操作が非常に簡単に記述できる ($\boldsymbol{v}_i$ の固有値を $\lambda_i$ とした)*1．行列 $A$ の掛け算を扱いたいときには標準基底よりも上の $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の方が便利なのである (これが対角化の肝であるとも言える)．このように，空間に対して "良い" 基底というのは本来一意的なものではないので，空間と基底を一旦分けて考えようというのがここから扱う話を大雑把に述べたものである．このとき，"空間" にあたるものを基底の言葉を使わずに抽象的に書いたのが**ベクトル空間**である．しかし，何の条件もなければ何も数学が展開できないので，ベクトル空間の理論では和『+』とスカラー倍『・』というベクトルにおける基本操作ができる構造が空間に備わっていることを仮定する．これは大まかに言えば "まっすぐな (= 線形な！) 空間" を考えるということに対応する*2．

## 9.2　ベクトル空間

それでは早速ベクトル空間の定義を述べよう．以下は非常に長い定義であるが，混乱しそうになったら $V$ を $\mathbb{K}^n$，『+』，『・』を普通のベクトルの和とスカラー倍だと思って読めば良い．そうすると，これらは $\mathbb{K}^n$ において，普通のベクトルの和とスカラー倍が満たすべき当たり前の性質をただ仮定しているだけだということがわかるだろう．

---

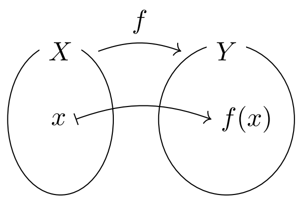
* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

*1 任意の $\mathbb{K}^n$ の元は $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と書けたことも思い出そう (定理 5.2)．

*2 空間と座標を分けるという考え方は幾何で習う『多様体論』にも通じる考え方で，現代の数学において非常に重要な考え方である．多様体においては，和やスカラー倍の構造は考えない代わりに，"曲がった空間" が扱えるようになる．

**用語の復習**

- 集合 $X, Y$ に対し，
$$X \times Y \coloneqq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$
である．この $\times$ は集合の**直積**と呼ばれるものである (数の掛け算ではないので注意)．
- 集合 $X, Y$ に対して，**写像** $f\colon X \to Y$ とは，$X$ の各元 $x$ に対して，集合 $Y$ のある元 $f(x)$ を対応させる対応のことである．この写像を
$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$$
というように表す．(例：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$．このとき，例えば $f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 2$．) また，このとき $X$ を $f$ の**定義域**，$Y$ を $f$ の**終域**という．
以下は写像のイメージ図である．




**定義 9.1**

3 つ組 $(V, +, \cdot)$ が $\mathbb{K}$ **上のベクトル空間**であるとは，これが以下のような 3 つ組であることである．

- $V$ は空でない集合，
- $+$ は写像 $+\colon V \times V \to V$ (**和**と呼ばれる．元の対応は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ と書く)．
- $\cdot$ は写像 $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$，(**スカラー倍**と呼ばれる．元の対応は $(c, \boldsymbol{v}) \mapsto c\boldsymbol{v}$ と書く)．

であって，以下が成立する．

(v1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$，
(v2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$，
(v3) ある元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$，(この $\boldsymbol{0}$ を**零元**という)
(v4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，ある元 $-\boldsymbol{v} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，(この $-\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$ **の逆元**という)
(v5) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(c + d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$，
(v6) 任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$，
(v7) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(cd)\boldsymbol{v} = c(d\boldsymbol{v})$，
(v8) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$．

また，ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ に対し，写像 $+, \cdot$ が明らかな場合には，単に $V$ をベクトル空間という．

注意 1 (ベクトル空間における和に関する注釈)．ベクトル空間の条件 (v2) は**結合法則**と呼ばれ，これにより<u>和を取る順番を変えても結果が変わらない</u>ということが導かれる．例えば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V$ に対し，$((\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_4$ と $(\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4))$ は一致するということが以下のようにして (v2) を繰り返し使うことによってわかる．(逆に言えばこれは (v2) を仮定しているから示されることであって，“当たり前” ではないということに注意する)．

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3) + \boldsymbol{v}_4 &= (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) \quad &&((\mathrm{v2})\ \text{で}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_4\text{とした})\\ &= \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4)) \quad &&((\mathrm{v2})\ \text{で}\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4\text{とした})\end{aligned}$$

一般に，(v2) を繰り返し使えば，どのように括弧を付けても全て答えが一致することが示される．この証明は

講義では扱わないが，興味のある方は腕試しとして是非チャレンジしてみて欲しい[*3]．これより，ベクトル空間 $V$ における演算『$+$』に対しては，以下では特に 2 つずつ括弧を付けることはしない．例えば，$V$ において，

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4,\quad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i$$

というような書き方をすることにする．なお，(v1) より和の並べ方も任意で良いということに注意する．特に，任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対し，$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}, (-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ も成立することに注意する．

$V$ の元 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ と $\mathbb{K}$ の元 $c_1,\dots,c_n$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$$

という形の和を $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ の**一次結合**という．

**例 1.** $\mathbb{K}^n$ は以下の普通の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix},\qquad c\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca_1\\ \vdots\\ ca_n\end{pmatrix}.$$

零元 $\boldsymbol{0}$ は零ベクトル $\boldsymbol{0}$ である．また，$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ に対して，$-\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1\\ \vdots\\ -a_n\end{pmatrix}$ である．

**例 2.** $\mathbb{K}$ の元を係数とする 1 変数多項式全体のなす集合

$$\mathbb{K}[x]\coloneqq\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0,a_1\dots,a_n\in\mathbb{K}\}$$

を考える．このとき，$\mathbb{K}[x]$ は以下の普通の多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n,$$
$$c(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=ca_0+ca_1x+\cdots+ca_nx^n.$$

零元 $\boldsymbol{0}$ は 0(定数項 0 のみの多項式) である．また，$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathbb{K}[x]$ に対して，

$$-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=-a_0-a_1x-\cdots-a_nx^n$$

である．

**例 3.** $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列全体のなす集合

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\coloneqq\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\ \middle|\ a_{ij}\in\mathbb{K}\ (i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)\right\}$$

を考える．このとき，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は行列の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．

零元 $\boldsymbol{0}$ はゼロ行列 (全ての成分が 0 の行列) である．また，$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対して，

$$-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\ -a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ -a_{m1}&-a_{m2}&\cdots&-a_{mn}\end{pmatrix}$$

である．

[*3] ヒントは演算『$+$』の回数に関する帰納法です．

**例 4.** $\mathbb{R}$ 上の連続な実数値関数全体 $C^0(\mathbb{R})$ のなす集合

$$C^0(\mathbb{R}) := \{f(x) \mid f(x) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上連続な実数値関数 }\} = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続 }\}^{*4}$$

を考える (例えば，$1+x,\ \sin x,\ e^x \in C^0(\mathbb{R})$)．このとき，$C^0(\mathbb{R})$ は関数の和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる ($c \in \mathbb{R}$)：

$$f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x), \quad cf\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto cf(x)$$

ここで，$f$ と $g$ が連続であるとき，上の $f+g, cf$ は共に連続であることに注意する (つまり，$f+g, cf \in C^0(\mathbb{R})$)．零元 $\mathbf{0}$ は定数関数 0 である (つまり全ての $x$ での値が 0 の関数)．また，$f \in C^0(\mathbb{R})$ に対して，$-f$ は

$$-f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -f(x)$$

で定まる関数である．

**例 5.** フィボナッチ型の漸化式を満たす $\mathbb{K}$ の元からなる数列全体のなす集合

$$F := \{(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{K}, \text{任意の } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{に対し，} a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$$

を考える (例えば，$(0,1,1,2,3,5,8,\dots) \in F$)．このとき，$F$ は以下の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる：

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots)\\ &c(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \dots)\end{aligned}$$

ここで，上の右辺がそれぞれ $F$ の元になっていることは次のように確かめられる：

任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\begin{aligned}&a_{n+2} + b_{n+2} = (a_n + a_{n+1}) + (b_n + b_{n+1}) = (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1}),\\ &ca_{n+2} = c(a_n + a_{n+1}) = ca_n + ca_{n+1}.\end{aligned}$$

このとき，$F$ の零元 $\mathbf{0}$ は全ての項が 0 の数列 $(0,0,0,0,\dots)$ である．また，$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in F$ に対して，

$$-(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \dots)$$

である．なおここでは，『$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$』というフィボナッチ型の漸化式を考えたが，これは一般に

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}\ (c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{K})$$

という形の定数係数斉次線形漸化式に置き換えても同じ議論ができる．

以上のような様々な空間が『ベクトル空間』という枠組みで並行して扱えるというのがこれからの話である．以下は任意のベクトル空間において成り立つ基本的な命題である．

**命題 9.2**

$V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき以下が成立する．

(1) $V$ において零元 $\mathbf{0}$ はただ 1 つに定まる．
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，その逆元 $-\boldsymbol{v}$ は $V$ においてただ 1 つに定まる．
(3) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}$．
(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$．

**証明．**

[*4] 本当は一番右の写像としての書き方が厳密に思われるのであるが，実用上は真ん中のような書き方をされることが多いだろう．$f(x)$ という書き方は見た目にわかりやすいので計算をするうえで便利であるという反面，$f(x)$ と書いたときに「関数 $f(x)$」を表しているのか，「写像 $f$ に $x$ という値を代入した時の値 (数字)」を表しているのか見た目からはわからないという問題がある．

(1) $\mathbf{0}'$ も $V$ の零元であるとすると，(v1)，(v3) より $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ となり，結局 $\mathbf{0}'$ は $\mathbf{0}$ に一致する．よって，$V$ の零元はただ 1 つである．

(2) $\boldsymbol{v}'$ も $\boldsymbol{v}$ の逆元であるとすると，(v1)，(v2)，(v3)，(v4) より

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}) + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} + (-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$$

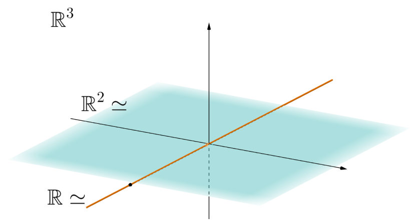
となり，結局 $-\boldsymbol{v}$ に一致する．よって，$\boldsymbol{v}$ の逆元はただ 1 つである．

(3) (v5) より，$0\boldsymbol{v} = (0+0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-0\boldsymbol{v}$ を加えて，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}$．

(4) (v5)，(v8) と (3) より，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-\boldsymbol{v}$ を加えて，$-\boldsymbol{v} = \mathbf{0} + (-1)\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$． □

## 9.3 部分空間

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ においては 3 番目の座標が 0 になる元の集まりとして自然に 2 次元空間 (平面)$\mathbb{R}^2$ が入っており，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ においては，2 番目の座標が 0 になる元の集まりとして，自然に 1 次元空間 $\mathbb{R}$ が入っていた．




このような『ベクトル空間の中にあるベクトル空間』は一般の状況では部分空間として以下のように定式化される．

**定義 9.3**

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，$V$ の部分集合 $W$ が $V$ の**部分空間**であるとは，

(s1) $\mathbf{0} \in W$，($\mathbf{0}$ は $V$ の零ベクトル)
(s2) 任意の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ に対し，$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in W$，($W$ **は和で閉じている**という)
(s3) 任意の $c \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$c\boldsymbol{w} \in W$，($W$ **はスカラー倍で閉じている**という)

が満たされることを言う．

注意 2. ここで『部分集合』と『部分空間』という言葉は違うものであるということをしっかり意識するようにしよう．これらの言葉を混同して使ってしまう事例が頻繁に見られる．部分集合というのはもとの集合から単に元をいくつか (無限個かもしれない) 選んできて得られる集合のことであって，部分空間というのは上で述べたようにそのような部分集合のうち，さらに (s1)，(s2)，(s3) という条件を満たす特別なもののことを指している．

上に言葉で述べたように部分空間はそれ自体がベクトル空間である．それを正確に主張したのが以下の命題であるが，少し細かい証明になるので，混乱しそうという方は証明を一度飛ばして読んでも良い．

**命題 9.4**

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W$ をその部分空間とする．このとき，$(W, +, \cdot)$ は再びベクトル空間となる．ただしここで，$(W, +, \cdot)$ の $+, \cdot$ はそれぞれ $V$ の $+, \cdot$ から定義域を制限して得られる和とスカラー倍とする．

**証明.** 部分空間の定義条件 (s2)，(s3) より，$V$ の和 $+\colon V\times V\to V$，スカラー倍 $\cdot\colon \mathbb{K}\times V\to V$ はそれぞれ，$+\colon W\times W\to W$，$\cdot\colon \mathbb{K}\times W\to W$ に制限できることがわかる．これらを $W$ の和とスカラー倍として，$W$ がベクトル空間となっていることを確かめれば良い．

まず，これらは $V$ で定まっていた写像の定義域 (と終域) をそのまま制限して得られる写像なので，$V$ で (v1)，(v2)，(v5)，(v6)，(v7)，(v8) が成立していたことから $W$ においてもこれらが成立することは自明である．また，(s1) より $\mathbf{0}\in W$ であるが，この $\mathbf{0}$ が $W$ においても零元の定義条件 (v3) を満たすことも明らかである．あとは，任意の $\boldsymbol{w}\in W$ に対し，$V$ での逆元 $-\boldsymbol{w}$ が $W$ の中から取れることを言えば (v4) が成立することがわかる．命題 9.2 の (4) より，$-\boldsymbol{w}=(-1)\boldsymbol{w}$ であるが，部分空間の定義条件 (s3) より，$(-1)\boldsymbol{w}\in W$ である．よって，示すべきことは全て示された． □

**例 6.** $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，

$$W_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z=0 \right\}, \qquad W_2 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y=z=0 \right\}$$

とするとこれらは定義 9.3 の直前で図示されているものである (水色の部分が $W_1$，オレンジの部分が $W_2$)．このとき，これらはどちらも $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．実際，これらが部分空間の定義 (s1)，(s2)，(s3) を満たしていることは容易に確かめられるだろう． またこれら自体がベクトル空間でもある．このように部分空間というのはベクトル空間における直線や平面のような “まっすぐな部分集合” だと思っていれば直感的には間違いではない (和やスカラー倍で閉じるという条件が “まっすぐである” ということを課している)．

部分空間に関する一般的な命題をもう 1 つ示しておこう．

**命題 9.5**

$V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W, W'$ をその部分空間とする．このとき，$W$ と $W$ の共通部分 $W\cap W'$ は再び $V$ の部分空間となる．

**証明.** $W\cap W'$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを示せばよい．

(s1) を満たすこと： $W, W'$ は $V$ の部分空間なので，$\mathbf{0}\in W$ かつ $\mathbf{0}\in W'$．よって，$\mathbf{0}\in W\cap W'$．

(s2) を満たすこと： $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W\cap W'$ とすると，$W, W'$ は $V$ の部分空間なので，$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in W$ かつ $\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in W'$．よって，$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in W\cap W'$．

(s3) を満たすこと： $c\in\mathbb{K}, \boldsymbol{w}\in W\cap W'$ とすると，$W, W'$ は $V$ の部分空間なので，$c\boldsymbol{w}\in W$ かつ $c\boldsymbol{w}\in W'$．よって，$c\boldsymbol{w}\in W\cap W'$．

以上より，$W\cap W'$ は $V$ の部分空間である． □

注意 3. ベクトル空間 $V$ の部分空間 $W, W'$ に対し，その和集合 $W\cup W'$ は一般には部分空間にはならない．例えば，ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$W \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x\\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x\in\mathbb{R} \right\} \qquad\qquad W' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 0\\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y\in\mathbb{R} \right\}$$

はそれぞれ部分空間であるが，それらの和集合 $W\cup W'$ は部分空間ではない．なぜなら，$\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix} \in W\cup W'$ であるが，$\begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}$ は $W$ にも $W'$ にも入っていないので $\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}\notin W\cup W'$ となるためである ((s2) が満たされない)．

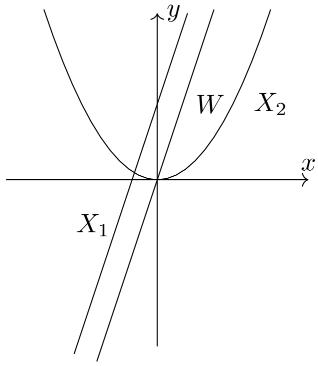
一方，$W\cap W'=\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ であり，これは $\mathbb{R}^2$ の自明な部分空間である．

部分空間の概念に慣れるために以降で例を沢山見ていこう．

**例 7.** $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; -3x + y = 0 \right\}, \qquad X_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; -3x + y = 1 \right\}, \qquad X_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 - y = 0 \right\}$$

という 3 つの部分集合を考えてみると，$W$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であるが，$X_1, X_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．




これらは以下のように確かめられる．

<u>$W$ が部分空間であること：</u> $W$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを順にチェックすれば良い．

まず，$-3 \cdot 0 + 0 = 0$ となるので，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ となるため，条件 (s1) は満たされる．

次に，任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ をとると，条件より

$$\begin{cases} -3x_1 + y_1 = 0 \\ -3x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

となる．これらより，

$$-3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (-3x_1 + y_1) + (-3x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W$$

となる．よって，条件 (s2) も満たされる．

最後に，任意の $c \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ をとると，条件より $-3x + y = 0$ となることに注意して，

$$-3(cx) + (cy) = c(-3x + y) = c \cdot 0 = 0.$$

よって，

$$c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \in W$$

となる．これより，条件 (s3) も満たされる．以上より，$W$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である．

<u>$X_1$ が部分空間でないこと：</u> $-3 \cdot 0 + 0 \neq 1$ となるので，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin X_1$ となり，条件 (s1) が満たされないため，$X_1$ は部分空間ではない (ちなみに (s2)，(s3) も満たさない．図からもすぐにわかるであろう)．

ここからわかるように部分空間であるためには “原点” を含んでいる必要がある．これはスカラー倍で閉じていないといけないという要請からも自然である．実際，命題 9.2 (3) より，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して，$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{w}$ となるので，スカラー倍で閉じているならば $\mathbf{0}$ も含んでいないといけない．それではなぜ (s3) から導けそうなことをわざわざ定義条件に入れているのかと言うと，(s1) によって部分空間が空集合であるという状況を排除しているのである (空集合の場合 (s2)，(s3) は自明に真になってしまう)．

<u>$X_2$ が部分空間でないこと：</u>定義より，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \in X_2$ であるが，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ は

$$3^2 - 5 = 4 \neq 0$$

となることより，$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \notin X_2$ である．よって，(s2) を満たさないので，$X_2$ は部分空間ではない (ちなみに (s3) も満たさない．図からもすぐにわかるであろう)．

以上の計算から推測されるかもしれないが，実際 $\mathbb{R}^2$ における部分空間は，

- 原点のみからなる集合：$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.
- 原点を通る直線：$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;\middle|\; ax + by = 0\right\}$ $(a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0))$.
- $\mathbb{R}^2$ 全体

のいずれかとなる．是非証明を試みて欲しい．

**例 8** (連立一次方程式の解空間)．$A$ を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とする．このとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$W_A \coloneqq \left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\}$$

は $\mathbb{K}^n$ の部分空間となる．なお，この空間の一般の元の形を求めることは係数行列を $A$ とする連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

の一般解を求めることに他ならないということに注意する．部分空間であることは以下のように証明される：

$W_A$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを順にチェックすれば良い．

まず，$A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となるので*5，$\mathbf{0} \in W_A$ となるため，条件 (s1) は満たされる．

次に，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_A$ をとると，条件より

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \\ A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

となる．これらより，

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$$

となるので，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W_A$．よって，条件 (s2) も満たされる．

最後に，任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x} \in W_A$ をとると，条件より $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるので，

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

よって，

$$c\boldsymbol{x} \in W_A$$

となる．これより，条件 (s3) も満たされる．以上より，$W_A$ は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．

なお，$\mathbb{K} = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$W_A = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (0)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x + y = 0\right\}$$

となる．これは例 7 の $W$ である．よって，$W_A$ はこの $W$ の一般化であると見れる．

*5 左辺の $\mathbf{0}$ は $n$ 次零ベクトル，右辺の $\mathbf{0}$ は $m$ 次零ベクトルである．

**例 9** (固有空間)．$A$ を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $n$ 次正方行列とする．このとき，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$V_A(\lambda) \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}(\subset \mathbb{K}^n)$$

とするとき，これは $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．とくに，$\lambda$ が $A$ の固有値であるとき，$V_A(\lambda)$ は $A$ の固有値 $\lambda$ の固有空間の定義そのものである (定義 5.4)．なお，$\lambda$ が $A$ の固有値でないときは，$V_A(\lambda) = \{\mathbf{0}\}$ である．

$V_A(\lambda)$ が部分空間であることは，

$$V_A(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid (\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\} = W_{\lambda I_n - A}$$

なので，例 8 からわかる．

**例 10** (自明な部分空間)．一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V$ において，$V$ の零元のみからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$，および $V$ 全体は $V$ の部分空間である．これらが (s1)，(s2)，(s3) の条件を満たすことは自明であろう．これらの部分空間を $V$ の**自明な部分空間**という．

**例 11** (最大次数を固定した多項式の集合)．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．このとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}[x]$(例 2) の部分集合 $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ を

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \coloneqq \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

と定義する．$\mathbb{K}[x]$ の定義とほとんど同じように見えるが，この部分集合の定義にあたっては $n$ を先に固定しているということに注意しよう．つまり，これは『高々 $n$ 次の多項式』全体のなす部分集合である．例えば，

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 0} = \{a \mid a \in \mathbb{K}\}, \quad \mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{K}\}, \quad \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

である．このとき，$\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ は $\mathbb{K}[x]$ の部分空間である．これは，

- (s1) $0 \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ であり，
- (s2) 2 つの高々 $n$ 次式の和は高々 $n$ 次式であり，
- (s3) 高々 $n$ 次式のスカラー倍は高々 $n$ 次式である

ということからわかる．

この部分空間は明らかに

$$\mathbb{K}[x]_{\leq 0} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \subset \cdots$$

を満たす．

**例 12** ($C^k$ 級関数)．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$または $k = \infty$ とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の $k$ 階連続微分可能[*6]な実数値関数全体の集合

$$C^k(\mathbb{R}) \coloneqq \{f(x) \mid f(x) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上 } k \text{ 階連続微分可能 }\}$$

とする．このとき，$C^k(\mathbb{R})$ は $C^0(\mathbb{R})$(例 4) の部分空間となる。これは，

- (s1) $0 \in C^k(\mathbb{R})$ であり，
- (s2) 2 つの $k$ 階連続微分可能関数の和が再び $k$ 階連続微分可能関数であり，
- (s3) $k$ 階連続微分可能関数のスカラー倍が再び $k$ 階連続微分可能となる

ということからわかる (詳細は微積分学の講義に譲ることにする)．

[*6] $k$ 階連続微分可能とは $k$ 回微分可能であり，かつその $k$ 階までの導関数が全て連続となるということ．