線形代数 II 第 10 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

第 9 回講義資料の導入部分では "空間" と "基底" を分けて考えるというアイデアを紹介し，(まっすぐな) 空間の定式化として $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を導入した．今回は一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間における基底について解説する．なお，$\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の典型例であったが，この場合には第 5 回講義資料 (定義 5.3) で解説したものと一致する．

10.1 一次独立・一次従属

基底を定義するにあたって，まずは $\mathbb{K}^n$ のときのように一次独立性という概念を準備する．定義は第 4 回講義資料定義 4.3 で $\mathbb{K}^n$ としていたところを一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えるだけである．

定義 10.1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の元の組 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ が ($\mathbb{K}$ 上) **一次独立** (または**線形独立**) であるとは，条件

$$「c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0},\ c_1,\dots,c_k\in\mathbb{K} \text{ ならば，必ず } c_1=\cdots=c_k=0」$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は ($\mathbb{K}$ 上) **一次従属** (または**線形従属**) であるという．

また，V の元からなる無限集合 B が**一次独立**であるとは，B の任意の有限部分集合 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}\subset B$ が上の意味で一次独立な集合となることをいう．

以下は定義からほぼ明らかである．

命題 10.2

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の一次独立な部分集合とする．このとき，B の任意の部分集合 $B'\subset B$ は再び一次独立な部分集合となる．

例 1. $V=\mathbb{K}^n$ の場合は，ここでの一次独立性は定義 4.3 で学んだ $\mathbb{K}^n$ における一次独立性と全く同じものである．この場合の例については第 4 回講義資料の例 3〜9 を復習していただきたい．

例 2. $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ とする (第 9 回講義資料例 3)．このとき，

$$E\coloneqq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ F\coloneqq\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ H\coloneqq\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

とおくと[*1]，

$$B\coloneqq\{I_2,\ E,\ F,\ H\}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 これらを E,F,H と書くのは Lie 環論という分野でよくこの記号が使われるためである．あまり気にしないでいただきたいが，興味のある方は是非『Lie 環，$\mathfrak{sl}_2$』というキーワードで調べてもらいたい (私 (大矢) の専門分野でもあるので興味を持った場合はご質問頂ければ幸いです)．

は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 I_2 + c_2 E + c_3 F + c_4 H = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になったと仮定する ($\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ における $\mathbf{0}$ は零行列であったことに注意する)．このとき，左辺の行列は具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix}$$

となるので，上の等式が成立するとき，

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_1 - c_4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

となる．よって，B は一次独立である．

例 3. $V = \mathbb{K}[x]$ とする (第 9 回講義資料例 2)．このとき，

$$B_1 \coloneqq \{1, x, x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = \mathbf{0} = 0$$

になったと仮定する ($\mathbb{K}[x]$ における $\mathbf{0}$ は零行列 0 であったことに注意する)．このとき，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である．よって，B_1 は一次独立である．

B_1 は最も標準的な一次独立な集合であるが，もちろんもっと複雑な例も考えることができる．

$$B_2 \coloneqq \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-3 + 2x + 2x^2) + c_2(x - x^2) + c_3(-1 + x - x^2) = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する．上式を整理すると

$$(-3c_1 - c_3) + (2c_1 + c_2 + c_3)x + (2c_1 - c_2 - c_3)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -3c_1 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式が唯一の解として $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ を持つことを示せばよい．いま，

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

より，この連立一次方程式は係数行列が正則なので，唯一つの解

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を持つ．よって，B_2 は一次独立である．

一次従属な例も見ておこう．

$$X \coloneqq \{-1 + x^2, -2 + 2x + 2x^2, -x\}$$

とすると，X は $\mathbb{K}[x]$ において一次従属である．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-1 + x^2) + c_2(-2 + 2x + 2x^2) + c_3(-x) = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する．上式を整理すると，

$$(-c_1 - 2c_2) + (2c_2 - c_3)x + (c_1 + 2c_2)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$$

より，上の方程式は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解を持つ (例えば $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 2$)．よって，$X$ は一次従属となる．

例 4. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする (第 9 回講義資料例 12)．このとき，

$$B \coloneqq \{\sin x, \cos x\}$$

は $C^\infty(\mathbb{R})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する ($C^\infty(\mathbb{R})$ における $\mathbf{0}$ は定数関数 0 であったことに注意する)．上式は $\mathbb{R}$ 上の関数としての等式なので，x に任意の実数を代入しても等式が成立する．$x = 0$ とすると，

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$$

なので，$c_2 = 0$ である．$x = \pi/2$ とすると，

$$c_1 \sin(\pi/2) + c_2 \cos(\pi/2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$$

なので，$c_1 = 0$ である．よって，$c_1 = c_2 = 0$ となるので，B は一次独立である．

例 5. 無限個の元からなる一次独立な集合も見ておこう．$V = \mathbb{K}[x]$ とする．このとき，

$$B \coloneqq \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．任意の B の有限部分集合

$$\{x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_k}\} \subset B$$

をとると，これは例 3 の B_1 と同じように一次独立な集合であることがわかる．よって，B は一次独立である．

ここで，無限集合の場合の一次独立性が「任意の有限集合」を取って考えないといけないということで少しわかりにくい部分があるだろう．ここの記述を少し見やすくするために (この講義だけの) 以下のような記号を準備する．ベクトル空間 V の (無限集合かもしれない) 部分集合 X に対して，

$$\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}} \coloneqq \{(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v} \in X} \mid c_{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{K}\ (\boldsymbol{v} \in X),\ c_{\boldsymbol{v}} \neq 0 \text{ となる } \boldsymbol{v} \in X \text{ は高々有限個 }\}.$$

とする[*2]．例えば，$X = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \dots\}$ とすると，集合 $\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ は数列 $(c_{\boldsymbol{v}_1}, c_{\boldsymbol{v}_2}, c_{\boldsymbol{v}_3}, \dots)$ であって，有限個の $c_{\boldsymbol{v}_i}$ を除いて $c_{\boldsymbol{v}_i} = 0$ となるようなものからなる．特に，X が有限集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ のときは，

$$\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}} = \{(c_{\boldsymbol{v}_1}, \dots, c_{\boldsymbol{v}_n}) \mid c_{\boldsymbol{v}_i} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}.$$

である (そもそも X が有限集合だと全ての $\boldsymbol{v} \in X$ に対して $c_{\boldsymbol{v}} \neq 0$ でも「$c_{\boldsymbol{v}} \neq 0$ となる $\boldsymbol{v} \in X$ は高々有限個」という条件に反しないので，この条件は実質無視できる条件になる)．$\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ においては，

- $(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X} + (d_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X} = (c_{\boldsymbol{v}} + d_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$，
- 任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，$c(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X} = (cc_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$，

という操作を考えることができ，これを和とスカラー倍として $\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ はベクトル空間となる．(ベクトル空間の定義条件 (v1)–(v8) のチェックは各自行うこと．また，上のそれぞれの式の右辺が再び $\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ の元となっていることに注意すること．) 特に零元は $\boldsymbol{0} = (0)_{\boldsymbol{v}\in X}$ (全ての $\boldsymbol{v} \in X$ に対し，$c_{\boldsymbol{v}} = 0$)，$(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$ の逆元は $(-c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$ である．

さて，各 $(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X} \in \mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ に対しては，一次結合

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in X} c_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \in V$$

が問題無く定まる．これは X が無限集合であったとしても，$\mathbb{K}^{X,\mathrm{fin}}$ における「$c_{\boldsymbol{v}} \neq 0$ となる $\boldsymbol{v} \in X$ は高々有限個」という条件から実質的に有限和とみなせるためである．この記号を用意しておくと，一次独立性の定義は有限集合と無限集合で区別することなく次のように書くことができる[*3]．

定義 10.3 (定義 10.1 の言い換え)

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の元からなる集合 B(有限集合でも無限集合でも良い) が ($\mathbb{K}$ 上) **一次独立** (または**線形独立**) であるとは，条件

$$「\sum_{\boldsymbol{v}\in B} c_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ (c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}} \text{ ならば，必ず } (c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in B} = (0)_{\boldsymbol{v}\in B}」$$

が成立することを言う．B が一次独立でないとき，B は ($\mathbb{K}$ 上) **一次従属** (または**線形従属**) であるという．

例 6. 上で準備した記号を用いて，例 5 に出した $\mathbb{K}[x]$ の無限部分集合

$$B \coloneqq \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$$

が一次独立であることを述べてみよう．$(c_{x^i})_{x^i\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ に対し，

$$\sum_{x^i\in B} c_{x^i} x^i = \sum_{i\geq 0} c_{x^i} x^i = 0$$

とすると，これが成立するのは全ての $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$c_{x^i} = 0$ となる場合のみである．よって，B は一次独立である．

10.2 部分集合によって生成される部分空間

基底を定義するにあたってもう一つ大事な部分集合によって生成される部分空間というものを準備しよう．

[*2] $(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$ は「X の元で添え字付けられた $\mathbb{K}$ の元の族」である．$c_{\boldsymbol{v}} = c(\boldsymbol{v})$ と考えれば，$(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in X}$ を与えることと写像 $c\colon X \to \mathbb{K}$ を与えることは同じことである．

[*3] 上の定義との同値性は各自確認せよ．

定義 10.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 S に対し，S の元の一次結合全体からなる集合を $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ と書き，これを S によって**生成される** (または**張られる**) 部分空間という．つまり，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S &:= \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid c_1,\ldots,c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k \in S\} \\ &= \left\{ \sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} \;\middle|\; (c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}} \right\}\end{aligned}$$

とする．

定義より，以下は直ちにわかるが，部分空間の定義条件および $\mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}}$ に慣れるために一応証明を付けておこう．

命題 10.5

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，S を V の部分集合とする．このとき，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ は V の部分空間である．

証明. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ が部分空間の定義条件 (s1)，(s2)，(s3) を満たすことを示せばよい．

(s1) を満たすこと： $(c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} = (0)_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}}$ とすれば，$\sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{0} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$.

(s2) を満たすこと： 任意の $\sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}, \sum_{\boldsymbol{v}\in S} d_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ $((c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S}, (d_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}})$ に対し，

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \sum_{\boldsymbol{v}\in S} d_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{v}\in S}(c_{\boldsymbol{v}} + d_{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v}$$

で，$(c_{\boldsymbol{v}} + d_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}}$ なので，$\sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} + \sum_{\boldsymbol{v}\in S} d_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$.

(s3) を満たすこと： 任意の $c \in \mathbb{K}, \sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}, \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ $((c_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}})$ に対し，

$$c \cdot \sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{v}\in S} cc_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$$

で，$(cc_{\boldsymbol{v}})_{\boldsymbol{v}\in S} \in \mathbb{K}^{S,\mathrm{fin}}$ なので，$c \cdot \sum_{\boldsymbol{v}\in S} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$.

以上より，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ は V の部分空間である． □

例 7. $V = \mathbb{K}^n$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} &= \{c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^n\end{aligned}$$

である．定理 5.2 より，一般に $B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であるとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = \mathbb{K}^n.$$

例 8. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ を考えるとき，S は一次独立である必要は無い．例を見てみよう．$V = \mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は一次従属である (第 4 回講義資料例 5)．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S &= \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^2\end{aligned}$$

である．このように $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ を考える上で S に “余分” にベクトルが入っていることもある．

例 9. 例 8 よりももっと極端な例を挙げておくと，任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対し $S = V$ と取ると，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\, V = V$$

である．

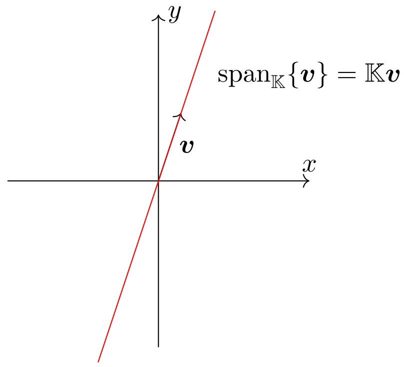
例 10. $V = \mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}\} = \{c\boldsymbol{v} \mid c \in \mathbb{K}\} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{K} \right\}$$

である．このような 1 元で生成される部分空間は $\mathbb{K}\boldsymbol{v}$ と書かれることもある．図示すると以下のようになっている．



一般に $\mathbb{K}^n$ において，1 元 $\boldsymbol{v}$ で生成される部分空間は原点 $\mathbf{0}$ を通り，方向ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする直線となる．

例 11. $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ とする．例 2 の記号を再び用いる．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\, B = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\,\{I_2,\ E,\ F,\ H\} &= \{c_1 I_2 + c_2 E + c_3 F + c_4 H \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K} \right\}.\end{aligned}$$

となる．ここで，任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ に対し，

$$c_1 = \frac{a+d}{2}, \quad c_2 = b, \quad c_3 = c, \quad c_4 = \frac{a-d}{2}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1 - c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とできる．これより $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の任意の元は I_2, E, F, H の一次結合で書けることがわかる．よって，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\, B = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

である．因みに，

$$B' \coloneqq \{E, F, H\}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\, B' &= \{c_1 E + c_2 F + c_3 H \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_3 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}\end{aligned}$$

となる．

例 12. $V = \mathbb{K}[x]$ とする．例 3，例 5 の記号を再び用いる．このとき，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{1, x, x^2\} = \{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$$

となる (第 9 解講義資料例 11 の記号参照)．また，

$$\begin{aligned}\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B &= \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} c_{x^i} x^i \;\middle|\; (c_{x^i})_{x^i \in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}} \right\} = \mathbb{K}[x]\end{aligned}$$

となる．

例 13. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする．このとき，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\sin x, \cos x\} = \{c_1 \sin x + c_2 \cos x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{K}\}$$

となる．これは $C^\infty(\mathbb{R})$ 内の部分空間

$$\left\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x) \right\}$$

に一致する (詳細は微積分学に譲る)．この部分空間は微分方程式 $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x)$ の解空間ということができる．

10.3 ベクトル空間の基底

それでは一般のベクトル空間における基底の定義を述べよう．

定義 10.6

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が次の性質 (b1)，(b2) を満たすとき，B を V の**基底** (basis) という．

(b1) B は一次独立である．
(b2) B は V を生成する．つまり．$\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である．

まず，ここで定義したものが以前 $\mathbb{K}^n$ に対して定義した基底と同じ概念であることを確かめておこう．

命題 10.7

$\mathbb{K}^n$ の部分集合 B に対し以下は同値である．

(1) B は定義 10.6 の意味で $\mathbb{K}^n$ の基底である．
(2) B は n 個の元からなる一次独立な集合である[*4]．

証明.

(2)⇒(1)： (b1) を満たすことはすでに仮定しており，n 個の元からなる一次独立な集合が (b2) を満たすことは定理 5.2 の帰結である．よって，このとき B は定義 10.6 の意味で $\mathbb{K}^n$ の基底である．

(1)⇒(2)： B が一次独立であることは (b1) で仮定されているので，あとは B が n 個の元からなることを示せば良い．B は一次独立な集合なので，定理 5.1 (1) より，B の元の個数は n 個以下である．ここで，$B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ の元の個数 k が n より真に小さい場合，定理 5.1 (2) より，ある V の元 $\boldsymbol{v}$ が存在して，$B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ が一次独立な集合となるようにできる．一方，(b2) より $\boldsymbol{v} \in V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}} B$ なので，ある $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{b}_k$$

[*4] これが定義 5.3 における $\mathbb{K}^n$ の基底の定義であった．

とできる．このとき，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k + (-1)\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となるので，これは $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ が一次独立であることに反する．よって，$k = n$ である． □

例 14. 命題 10.7 より，これまでに見てきた様々な $\mathbb{K}^n$ の基底はベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の基底の例を与えている．特に，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V における基底の取り方は一般に一通りではないことがわかる．

例 15. 例 2 と例 11 での計算から，$B \coloneqq \{I_2,\ E,\ F,\ H\}$ は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底であることがわかる．

例 16. m, n を正の整数とし，E_{ij} を (i,j) 成分が 1，その他の成分が全て 0 の $m \times n$ 行列とする．例えば，$m = 2, n = 3$ のとき，

$$E_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{13} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{23} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ は $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ の基底である．証明は各自の練習問題とする (これは数字の並べ方を四角にしているだけで，本質的には $\mathbb{K}^{mn}$ の話と思えば良く，その場合 E_{ij} は基本ベクトルに対応するものとなっている)．

例 17. 例 3, 例 12 での計算から，$\{1, x, x^2\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であることがわかる．より一般に，$\{1, x, \ldots, x^k\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ の基底である (考え方は $k = 2$ のときと全く同じである)．また，例 5 での考察を踏まえると，$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $\mathbb{K}[x]$ の基底である．

第 9 回講義資料の導入部で，$\mathbb{K}^n$ の任意の元は基本ベクトルからなる標準的な基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

と表すことができるので，$\mathbb{K}^n$ における "座標" はその点を標準的な基底の一次結合で書いた場合の係数の情報と思うことができるというアイデアを紹介した．次の命題は一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V においても同様のことができるということを主張している．すなわち，基底を取ることで，V における任意の点が基底の一次結合で書いた時の係数の情報として一通りに表せるということを述べている．この意味で，「基底を取る」というのはベクトル空間 V に「座標を導入する」というような操作であると言える．

命題 10.8

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の基底とする．このとき任意の V の元は B の元の一次結合としてただ一通りに表すことができる．すなわち，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，ある $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ が存在し，

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$$

となり，さらに，このような $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ は $\boldsymbol{v} \in V$ に対して一意的に定まる．

証明． 任意の V の元が B の元の一次結合として表すことができるというのは基底の定義条件 (b2) そのものである．よって，後はこの表示が一意的であることを示せばよい．

ある $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B}, (d_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ が存在し，

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} d_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$$

となったと仮定する．このとき，

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in B} (c_{\boldsymbol{b}} - d_{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となるが，B の一次独立性 (b1) により，任意の $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，

$$c_{\boldsymbol{b}} - d_{\boldsymbol{b}} = 0, \text{ すなわち, } c_{\boldsymbol{b}} = d_{\boldsymbol{b}}$$

となる．よって，このとき $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in B} = (d_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in B}$ となることがわかる． □

注意 1．命題 10.8 の証明を見ると，

- V の任意の元が B の元の一次結合で書けるという部分で基底の定義条件 (b2) を使い，
- その表示が一意的であるという部分で基底の定義条件 (b1) を使っている

ということがわかる．つまり，大雑把に言えば (b2) が “B に十分沢山の元がある” ことを保証しており，(b1) が “B には余分に多くの元は無い” ということを保証している．この意味で，基底の定義条件は “過不足の無さ” を課しているものであるということが理解できる．

最後に，基底の存在に関する以下の定理を述べておこう．

定理 10.9

$\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 V は基底を持つ．

定理 10.9 の証明のためにはいくつか言葉を準備する必要があるが，それをすると講義の本筋からやや脱線してしまうため，講義内では証明は扱わず，補足プリントで解説を行う．一言だけ述べておくと証明においては選択公理と同値であることが知られている『ツォルンの補題』と呼ばれる補題を用いる．ちなみに，$V = \{\mathbf{0}\}$ のときはその基底は空集合 $\varnothing$ であるする．

定理 10.9 によって，ベクトル空間においては基底を取るという操作がいつでも安心してできることがわかる．$\mathbb{K}^n$ の部分空間等を考える分にはいつでも基底が取れるというのはいかにも正しそうな気がするが，$C^\infty(\mathbb{R})$ 等の “大きい” ベクトル空間に対しても基底が取れるという事実は当たり前ではないということがわかるだろう (実際 $C^\infty(\mathbb{R})$ の基底を具体的に書き下すということは無理であろう)．