線形代数 II 第 11 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回のテーマは『線形写像』である．線形写像とはベクトル空間の間の写像であって，和とスカラー倍の構造と両立する写像である (厳密な定義は後程)．以下で見るように様々な重要な変換 (例えば回転変換，対称変換，微分等々…) は実は線形写像として表される．また，2 つのベクトル空間を比較する際にも線形写像が用いられる．さらに先の講義では，線形写像は行列を用いて表すことができるということがわかる．つまり，線形写像は重要な変換を含むが，一方では行列を用いて計算ができるというとても有用な写像なのである．

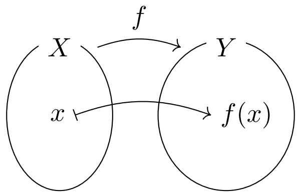
本題に入る前に，まずは写像の基本用語について復習をしておこう．

写像の用語の復習

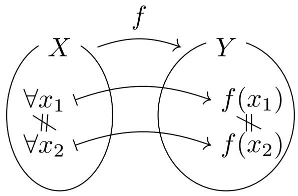
集合 X, Y に対して，**写像** $f\colon X\to Y$ とは，X の各元 x に対して，集合 Y のある元 $f(x)$ を対応させる対応のことである．この写像を

$$f\colon X\to Y,\ x\mapsto f(x)$$

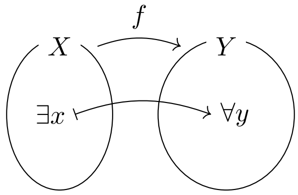
というように表す．(例：$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$．このとき，例えば $f(1)=1^2=1, f(2)=2^2=4$．) このとき，X を f の**定義域**，Y を f の**終域**という．



写像 $f\colon X\to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x_1\neq x_2$ なる $x_1, x_2\in X$ に対して，$f(x_1)\neq f(x_2)$ となることである．(上の例は，$1\neq -1$ に対し，$f(1)=1=(-1)^2=f(-1)$ なので単射ではない．)



写像 $f\colon X\to Y$ が**全射**であるとは，任意の $y\in Y$ に対し，ある $x\in X$ が存在して，$f(x)=y$ となるということである．(上の例では，$-1\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x)=x^2=-1$ となる $x\in\mathbb{R}$ は存在しないので，全射ではない．)

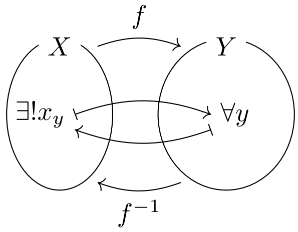


* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

写像 $f\colon X \to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．このとき，各 $y \in Y$ に対し，$f(x_y) = y$ となる $x_y \in X$ が必ずただ 1 つだけ存在するので，y に対してこの x_y を対応させることで，写像

$$Y \to X,\ y \mapsto x_y$$

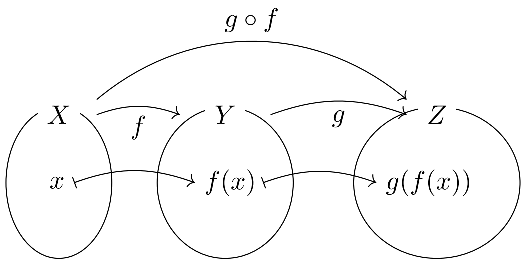
が得られる．これを f の**逆写像**といい，f^{-1} と書く．



写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ に対し，写像の合成 $g \circ f\colon X \to Z$ とは，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X$$

で定まる写像である．



$f\colon X \to Y$ が全単射のとき，

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \text{ かつ } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

である．ここで，$\mathrm{id}_Z\colon Z \to Z$ は**恒等写像** $z \mapsto z$ $(Z = X, Y)$ である．

11.1　線形写像

それではまず線形写像を定義し，その後で様々な例を見よう．

定義 11.1

V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が**線形写像**であるとは，

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')$,
(2) 任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$,

を満たすことである．

例 1. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，f_A は線形写像であることが以下のように確かめられる．
任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathbb{K}^n, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned} f_A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') &= A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{v}' = f_A(\boldsymbol{v}) + f_A(\boldsymbol{v}'), \\ f_A(c\boldsymbol{v}) &= A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = cf_A(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，f_A は

$$f_A \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ -x + 3y + 2z \end{pmatrix}$$

で定まる線形写像となる．

$\mathbb{R}^2$ において原点を中心に各点を θ 回転させるという変換は

$$\mathrm{Rot}(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$f_{\mathrm{Rot}(\theta)} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{Rot}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので，線形写像である．

$\mathbb{R}^2$ において原点を通る傾き θ の直線を軸にした線対称変換は

$$\mathrm{Ref}(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$f_{\mathrm{Ref}(\theta)} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{Ref}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos 2\theta)x + (\sin 2\theta)y \\ (\sin 2\theta)x - (\cos 2\theta)y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので，線形写像である．

(例えば，$\theta = 0$ のとき x 軸に関する線対称変換で $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$，$\theta = \pi/2$ のとき y 軸に関する線対称変換で $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$．)

例 2. 写像 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ は線形写像ではない．なぜなら，

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので，線形写像の定義条件 (1) が満たされないためである．ちなみに，

$$f\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

でもあるので，線形写像の定義条件 (2) も満たされていない．

例 3. 微分写像

$$\frac{d}{dx} \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x)$$

を考える ($\mathbb{K}[x]$ については第 9 回講義資料例 2 を参照)．このとき，$\frac{d}{dx}$ は線形写像である．実際，微分という操作は以下を満たす (詳細は微積分学に譲る)：

任意の $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x), \qquad \frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}(x).$$

例 4. 転置写像

$$T\colon \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^t A$$

を考える ($\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ については第 9 回講義資料例 3 を参照)．このとき，T は線形写像である．実際，転置という操作は以下を満たすことが容易に確かめられる：

任意の $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$T(A+B) = {}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B = T(A) + T(B), \qquad T(cA) = {}^t(cA) = c\,{}^t A = cT(A).$$

例 5. トレース写像

$$\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$$

を考える．このとき，Tr は線形写像である．実際，トレースは以下の性質を満たすのであった (第 9 回本レポート課題問題 1 補足解説参照)：

任意の $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}), c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \qquad \mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A).$$

以下は線形写像の基本性質である．

命題 11.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．V, W の零元をそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．このとき，以下が成立する．

(1) $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$f(-\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$.

証明.

(1) 線形写像の定義条件 (1) と零元の性質より，

$$f(\mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = f(\mathbf{0}_V) + f(\mathbf{0}_V)$$

となるので，両辺に $-f(\mathbf{0}_V)$ を加えて，$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V)$.

(2) 命題 9.2 (4) より，$-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ なので，線形写像の定義条件 (2) から，

$$f(-\boldsymbol{v}) = f((-1)\boldsymbol{v}) = (-1)f(\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v})$$

となる． □

命題 11.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間としたとき，以下が成立する．

(1) $f\colon V \to W, f'\colon V \to W$ を線形写像としたとき，$f + f'\colon V \to W$ を

$$\boldsymbol{v} \mapsto f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v})$$

により定義すると，$f + f'$ は再び線形写像となる．

(2) $f\colon V \to W$ を線形写像としたとき，$c \in \mathbb{K}$ に対して $cf\colon V \to W$ を

$$\boldsymbol{v} \mapsto cf(\boldsymbol{v})$$

により定義すると，cf は再び線形写像となる．

(3) $f\colon U \to V, g\colon V \to W$ を線形写像とすると，その合成 $g \circ f\colon U \to W$ は再び線形写像となる．

証明.

(1) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}(f+f')(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') + f'(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \\ &= f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') + f'(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') \quad (f, f' \text{は線形写像なので}) \\ &= f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') + f(\boldsymbol{v}') \\ &= (f+f')(\boldsymbol{v}) + (f+f')(\boldsymbol{v}')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+f')(c\boldsymbol{v}) &= f(c\boldsymbol{v}) + f'(c\boldsymbol{v}) \\ &= cf(\boldsymbol{v}) + cf'(\boldsymbol{v}) \quad (f, f' \text{は線形写像なので}) \\ &= c(f(\boldsymbol{v}) + f'(\boldsymbol{v})) \\ &= c(f+f')(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となるので，$f+f'$ は線形写像である．

(2) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, c' \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}(cf)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') &= cf(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \\ &= c(f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\ &= cf(\boldsymbol{v}) + cf(\boldsymbol{v}') \\ &= (cf)(\boldsymbol{v}) + (cf)(\boldsymbol{v}')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(cf)(c'\boldsymbol{v}) &= cf(c'\boldsymbol{v}) \\ &= c'cf(\boldsymbol{v}) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\ &= c'(cf)(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となるので，cf は線形写像である．

(3) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U, c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}') &= g(f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}')) \\ &= g(f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\ &= g(f(\boldsymbol{u})) + g(f(\boldsymbol{u}')) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\ &= (g\circ f)(\boldsymbol{u}) + (g\circ f)(\boldsymbol{u}')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(c\boldsymbol{u}) &= g(f(c\boldsymbol{u})) \\ &= g(cf(\boldsymbol{u})) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\ &= cg(f(\boldsymbol{u})) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\ &= c(g\circ f)(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

となるので，$g\circ f$ は線形写像である． □

注意 1．命題 11.3 (1)，(2) で定義された和とスカラー倍により，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) := \{f\colon V \to W \mid f \text{ は線形写像 }\}$$

という V から W への線形写像全体のなす集合はベクトル空間となる．ベクトル空間の定義条件 (v1)∼(v8) は各自チェックせよ．

例 6. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A$ は明らかに線形写像なので，例 4 の転置写像 T の -1 倍と id を命題 11.3 (1) の意味で加えた

$$\mathrm{id} - T\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto A - {}^tA$$

も線形写像となる．

例 7. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $\ell \times m$ 行列，B を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，例 1 のように線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^\ell,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \qquad f_B \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，合成写像 $f_A \circ f_B$ は，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対し，

$$(f_A \circ f_B)(\boldsymbol{x}) = f_A(f_B(\boldsymbol{x})) = f_A(B\boldsymbol{x}) = AB\boldsymbol{x}$$

で与えられるので，線形写像

$$f_{AB} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^\ell, \boldsymbol{x} \mapsto AB\boldsymbol{x}$$

に一致する．つまり，$f_A \circ f_B = f_{AB}$ である．

次は線形写像を構成・比較する上で便利な命題である．言葉で書くと「線形写像は基底の元の送り先で完全に決まっている」ということを主張している．

命題 11.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$B \subset V$ を V の基底とする．各 $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，W の元 $\boldsymbol{w_b}$ を任意に定めると[*1]，線形写像 $F \colon V \to W$ であって，全ての $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，

$$F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w_b}$$

を満たすものが<u>一意的に</u>存在する．また，$f \colon V \to W, g \colon V \to W$ を V から W への 2 つの線形写像としたとき，任意の $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，

$$f(\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{b})$$

が成立するのであれば，線形写像として $f = g$ である．

証明. まずは命題 11.4 の主張中にある線形写像 $F \colon V \to W$ の存在を証明する．命題 10.8 より，V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ はある $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}$$

という形に一通りに書けるので，これに対して

$$\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b}$$

を与える写像

$$F \colon V \to W,\ \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} \mapsto \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b}$$

を考える．F は定義より任意の $\boldsymbol{b} \in B$ に対して $F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w_b}$ を満たすので，あとは F が線形写像であることを証明する．任意の $\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}, \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c'_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} \in V$ $((c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in B}, (c'_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b} \in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}})$, $c \in \mathbb{K}$ に対して，

$$\begin{aligned}
F\left((\textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}) + (\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c'_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b})\right) &= F\left(\textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} (c_{\boldsymbol{b}} + c'_{\boldsymbol{b}}) \boldsymbol{b}\right) \\
&= \textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} (c_{\boldsymbol{b}} + c'_{\boldsymbol{b}}) \boldsymbol{w_b} \\
&= \textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b} + \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c'_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b} \\
&= F\left(\textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}\right) + F\left(\textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c'_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}\right)
\end{aligned}$$

$$F\left(c \cdot \textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}\right) = F\left(\textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}\right) = \textstyle\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b} = c \cdot \sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{w_b} = cF\left(\sum_{\boldsymbol{b} \in B} c_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}\right)$$

となるので，F は線形写像である．

[*1] $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}'$ に対して $\boldsymbol{w_b} = \boldsymbol{w_{b'}}$ となることがあっても良い．

次に全ての $\boldsymbol{b} \in B$ に対し，$F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}}$ を満たす線形写像 F がただ 1 つであることを証明するために，命題 11.4 の「また,」以降の主張を証明する (これは基底の各元の行き先が一致するような線形写像は写像として一致するということを主張している．これより，各 $\boldsymbol{b} \in B$ の行先が $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{b}}$ となるような線形写像は全て上で構成した F に一致すること，すなわち F の一意性が示される)．線形写像としての一致を示すためには，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})$$

となることを示せばよい．ここで再び V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ はある $(c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B} \in \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ を用いて $\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$ という形に書けるということに注意すると，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}) &= f\left(\sum\nolimits_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\right) \\
&= \sum\nolimits_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{b}) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \\
&= \sum\nolimits_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{b}) \quad (\text{仮定より}) \\
&= g\left(\sum\nolimits_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\right) \quad (g \text{ は線形写像なので}) \\
&= g(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

以上より，示すべきことは全て示された． □

例 8. 3 つの多項式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \mathbb{K}[x]$ を任意に選ぶと (重複があってもよい)，線形写像 $F\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x]$ であって

$$F(\boldsymbol{e}_1) = f_1(x), \quad F(\boldsymbol{e}_2) = f_2(x), \quad F(\boldsymbol{e}_3) = f_3(x),$$

を満たすものが存在する．より具体的には

$$F\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x], \ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$$

とすれば，これが条件を満たす線形写像である．例えば，$f_1(x) = 1 + x^3 + x^5, f_2(x) = f_3(x) = 2x + 3x^3$ とすると，

$$F\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x], \ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 + 2(c_2 + c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 3c_3)x^3 + c_1 x^5$$

という線形写像が得られる．

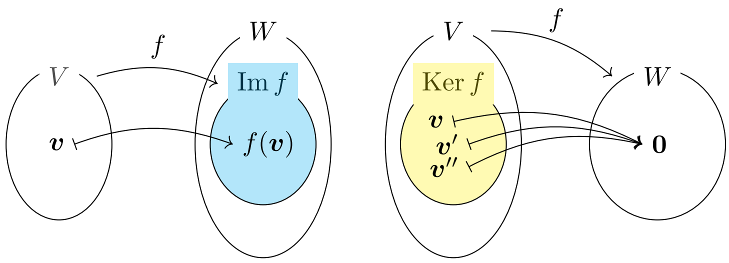
11.2 像と核

線形写像を考えるとそこから像と核という大事な部分空間が定まる．例は諸性質を述べた後に命題 11.7 の下にまとめて記載しているので，先に例を見たいという方は定義を読んだらそちらを見ていただきたい．

定義 11.5

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，f の**像 (image)** $\operatorname{Im} f$ と**核 (kernel)** $\operatorname{Ker} f$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\} = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\},\\ \operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}.\end{aligned}$$



命題 11.6

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) $U \subset V$ を V の部分空間とする．このとき，W の部分集合

$$f(U) \coloneqq \{f(\boldsymbol{u}) \in W \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

は W の部分空間である．とくに，$f(V) = \operatorname{Im} f$ は W の部分空間である．

(2) $U' \subset W$ を W の部分空間とする．このとき，V の部分集合

$$f^{-1}(U') \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) \in U'\}$$

は V の部分空間である．とくに，$f^{-1}(\{\boldsymbol{0}\}) = \operatorname{Ker} f$ は V の部分空間である．

証明． V, W の零元をそれぞれ $\boldsymbol{0}_V, \boldsymbol{0}_W$ と書く．$f(U), f^{-1}(U')$ について，部分空間の定義条件 (s1)–(s3)(定義 9.3) を順に確かめれば良い．

(1) U は V の部分空間なので $\boldsymbol{0}_V \in U$ であり，命題 11.2 (1) より $f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ となるので，$\boldsymbol{0}_W \in f(U)$．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in f(U)$ をとると，$f(U)$ の定義より，ある $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ が存在して，$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{w}_1, f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{w}_2$ となる．これより，

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{u}_1) + f(\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)$$

となる．ここで，U は部分空間なので，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U$．よって，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \in f(U)$．

さらに，任意の $\boldsymbol{w} \in f(U)$ をとると，$f(U)$ の定義より，ある $\boldsymbol{u} \in U$ が存在して $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$ となる．これより，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{w} = cf(\boldsymbol{u}) = f(c\boldsymbol{u})$$

となる．ここで，U は部分空間なので，$c\boldsymbol{u} \in U$．よって，$c\boldsymbol{w} = f(c\boldsymbol{u}) \in f(U)$．

以上より，$f(U)$ は W の部分空間である．

(2) U' は W の部分空間なので $\boldsymbol{0}_W \in U'$ であり，命題 11.2 (1) より $f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W \in U'$ となるので，$\boldsymbol{0}_V \in f^{-1}(U')$．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(U')$ をとると，$f^{-1}(U')$ の定義より，$f(\boldsymbol{v}_1) \in U'$ かつ $f(\boldsymbol{v}_2) \in U'$ となる．U' は部分空間なので，このとき，

$$U' \ni f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

となる．よって，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(U')$．

さらに，任意の $\boldsymbol{v} \in f^{-1}(U')$ をとると，$f^{-1}(U')$ の定義より，$f(\boldsymbol{v}) \in U'$ となる．U' は部分空間なので，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$U' \ni cf(\boldsymbol{v}) = f(c\boldsymbol{v})$$

となる．よって，$c\boldsymbol{v} \in f^{-1}(U')$.

以上より，$f^{-1}(U')$ は V の部分空間である． □

注意 2. 命題 11.6 (1) の U を，V の部分集合 S によって生成される部分空間 $U = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ とすると，

$$\begin{aligned} f(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S) &= \{f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in S\} \\ &= \{c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k) \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in S\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(S) \text{ ただし，} f(S) \coloneqq \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in S\} \end{aligned}$$

が成立する．

命題 11.7

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f \colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下の同値関係が成立する．

(1) f は全射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$.

(2) f は単射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$.

証明． 証明中では V, W の零元をそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．

(1) これは全射の定義そのものである．

(2) $\Rightarrow$ 方向: 命題 11.2 (1) より $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ なので，f の単射性より，任意の $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v}) \neq f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

よって，任意の $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ に対し，$\boldsymbol{v} \notin \operatorname{Ker} f$．これより，$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$.

$\Leftarrow$ 方向: 任意の $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$ なる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ をとる．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1) \neq f(\boldsymbol{v}_2)$ となることを示せばよい．いま，$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \neq \mathbf{0}_V$ と $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$ より，

$$\mathbf{0}_W \neq f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2).$$

これより，$f(\boldsymbol{v}_1) \neq f(\boldsymbol{v}_2)$. □

例 9. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，例 1 のように線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x},$$

を考える．このとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_A &= \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m \mid \text{ある } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{が存在して，} \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}\}, \\ \operatorname{Ker} f_A &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

となる．これより，

- $\operatorname{Im} f_A$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つような $\boldsymbol{b}$ 全体
- $\operatorname{Ker} f_A$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W_A(第 9 回講義資料例 8)

に他ならないことがわかる．よって，命題 11.7 より，

- f_A が全射 $\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$ に対して解を持つ
- f_A が単射 $\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は自明なもの $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ しかない $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$

という同値関係がわかる[*2]．また，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと (つまり $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$)，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

である．実際，像の定義より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f_A = \{f_A(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n\} &= \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \{x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}\end{aligned}$$

である．例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f_A &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}. \\ \mathrm{Ker}\, f_A &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x + 2y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}.\end{aligned}$$

この f_A は全射でも単射でもない．なお，一般に P を n 次正則行列としたとき，

$$f_P \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$$

は全単射線形写像である．実際，

$$f_{P^{-1}} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P^{-1}\boldsymbol{x}$$

を考えると，例 7 での計算により，

$$f_{P^{-1}} \circ f_P = f_{P^{-1}P} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \quad f_P \circ f_{P^{-1}} = f_{PP^{-1}} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$$

となるので，$f_{P^{-1}}$ は f_P の逆写像となる．

例 10. 例 3 で考えた微分写像を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, \frac{d}{dx} &= \left\{ f(x) \in \mathbb{K}[x] \,\middle|\, \text{ある } F(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ が存在して，} f(x) = \frac{dF}{dx}(x) \right\}, \\ \mathrm{Ker}\, \frac{d}{dx} &= \left\{ f(x) \in \mathbb{K}[x] \,\middle|\, \frac{df}{dx}(x) = 0 \right\}\end{aligned}$$

となる．ここで，多項式は多項式の範囲で不定積分可能なので，任意の $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して，$f(x) = \dfrac{dF}{dx}(x)$ を満たす $F(x) \in \mathbb{K}[x]$ を見つけることができる．(例えば，$f(x) = 1 + x + x^2$ のとき，$F(x) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$ と取ればよい．) これより，

$$\mathrm{Im}\, \frac{d}{dx} = \mathbb{K}[x]$$

となり，$\dfrac{d}{dx}$ は全射であることがわかる．

また，$\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ は定数多項式のみなので，

$$\mathrm{Ker}\, \frac{d}{dx} = \{c \mid c \in \mathbb{K}\}$$

となる．これより，微分写像 $\dfrac{d}{dx} \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ は全射であるが単射ではない．

[*2] 実は f_A が全射ということは $\mathrm{rank}\, A = m$ と同値であるということを今後の講義で証明する．

例 11. 例 6 で考えた写像

$$\mathrm{id}-T\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ A\mapsto A-{}^tA$$

を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T)&=\left\{B\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\mid \text{ある } A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ が存在して，} B=A-{}^tA\right\},\\ \mathrm{Ker}(\mathrm{id}-T)&=\left\{A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\mid A-{}^tA=O\right\}\end{aligned}$$

となる (O は零行列)．ここで，

$${}^t(A-{}^tA)={}^tA-{}^t({}^tA)={}^tA-A=-(A-{}^tA)$$

となるので，ある $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ が存在して，$B=A-{}^tA$ と書ける行列 B は ${}^tB=-B$ を満たす行列である．逆に ${}^tB=-B$ を満たす行列はある $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ が存在して，$B=A-{}^tA$ と書けることが確かめられる (A を B の上三角部分を取り出してきた行列とすればよい．詳細は各自考えよ)．よって，

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T)=\left\{B\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})\mid {}^tB=-B\right\}$$

となることがわかる．${}^tB=-B$ を満たす行列は**反対称行列**と呼ばれる．これより，$\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T)$ は反対称行列全体からなる集合であると言える．一方，

$$A-{}^tA=O\ \Leftrightarrow\ A={}^tA$$

なので，$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}-T)$ は対称行列全体からなる集合となる．