線形代数 II 第 12 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回は「ベクトル空間としては同じものとみなせる」という状況を，前回学んだ線形写像を用いて**同型**という概念として定式化する．例えばベクトル空間として，

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 2} := \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

という 2 つを考えよう．ベクトル空間の構造は和とスカラー倍で与えられていたが，$\mathbb{R}^3$ における和とスカラー倍は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}$$

であり，$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ における和とスカラー倍は

$$(a + bx + cx^2) + (a' + b'x + c'x^2) = (a + a') + (b + b')x + (c + c')x^2, \quad \alpha \cdot (a + bx + cx^2) = \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2$$

である．これらを見比べると，$\mathbb{R}^3$ の元の第 1, 2, 3 成分をそれぞれ，$1, x, x^2$ の係数と対応させれば，全く同じ計算になっていることがわかる．つまり，和とスカラー倍という構造にのみ着目するのであれば，$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ は全く並行して扱えるということである．この状況は写像

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a + bx + cx^2$$

が**全単射な線形写像**を与えているという形で述べられる．これが 2 つのベクトル空間が同型であるという状況である．

このようにしてベクトル空間の同型という概念を導入すると，次は「同型なものを同一視することにすると本質的にベクトル空間は "何種類くらい" あるのか」ということが気になってくる．そこで，後半では**有限次元ベクトル空間**という概念を導入し，全ての有限次元ベクトル空間はある n に対して $\mathbb{K}^n$ と同型になるということを証明する．ベクトル空間 V が $\mathbb{K}^n$ と同型なときその**次元**を n と定め，有限次元ベクトル空間が次元によって分類されるということを証明する．

12.1 ベクトル空間の同型

定義 12.1

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．全単射線形写像 $f \colon V \to W$ のことを，**(線形) 同型写像**という．線形同型写像 $f \colon V \to W$ が存在するとき，V と W は**同型である**といい，$V \simeq W$ と書く．

例 1. 導入で述べた写像

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a + bx + cx^2$$

は全単射線形写像なので，線形同型写像である．これより，$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ は同型であると言え，$\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ と書かれる．

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

例 2. 第 11 回講義資料例 9 で解説したように，P が n 次正則行列であるとき，

$$f_P \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$$

は全単射線形写像なので，線形同型写像である．なお，$(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$ となるのであった．

例 3. 転置写像

$$T\colon\ \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^t A$$

は線形写像であった (第 11 回講義資料例 4)．これは線形同型写像である．実際，${}^t({}^t A) = A$ なので，転置写像

$$T\colon\ \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^t A$$

が上の転置写像の逆写像であり (上の転置写像と定義域と値域が入れ替わっていることに注意)，T は全単射である．よって，$\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ である．

命題 12.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形同型写像とする．このとき，f の逆写像 $f^{-1}\colon W \to V$ も線形同型写像である．

証明. 全単射写像の逆写像が再び全単射写像であることは写像の構成から明らかなので，ここでは f^{-1} が線形写像となることを示す．任意の 2 元 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ をとると，

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}')) = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}' &= f(f^{-1}(\boldsymbol{w})) + f(f^{-1}(\boldsymbol{w}')) \\ &= f(f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}')) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる．よって，f の単射性より，

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') = f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}')$$

となる．次に，$c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{w} \in W$ とすると，

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(c\boldsymbol{w})) = c\boldsymbol{w} &= cf(f^{-1}(\boldsymbol{w})) \\ &= f(cf^{-1}(\boldsymbol{w})) \quad (f \text{ は線形写像なので}) \end{aligned}$$

となる．よって，f の単射性より，

$$f^{-1}(c\boldsymbol{w}) = cf^{-1}(\boldsymbol{w})$$

となる．以上より，f^{-1} は線形写像である． □

以下の命題は同型という概念がベクトル空間らの間に**同値関係**を定めているということを述べている．同値関係については本講義では詳しく立ち入らないが「代数学 I」の講義で詳しく扱うことになる．非常に大雑把に言えば，同値関係がイコール「=」と同様の関係を定めているということである．

命題 12.3

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の間の同型 $\simeq$ という関係は以下を満たす．

(反射律) 任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対し，$V \simeq V$.
(対称律) $V \simeq W$ であれば，$W \simeq V$.
(推移律) $U \simeq V, V \simeq W$ であれば，$U \simeq W$.

証明. (反射律) $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対し，恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V,\ \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ は明らかに同型写像なので，$V \simeq V$ である．
(対称律) $V \simeq W$ とすると，定義よりある線形同型写像 $f\colon V \to W$ が存在する．このとき，命題 12.2 より $f^{-1}\colon W \to V$ も線形同型写像である．よって，$W \simeq V$ である．

(推移律) $U \simeq V, V \simeq W$ とすると，定義より線形同型写像 $f\colon U \to V, g\colon V \to W$ が存在する．このとき，命題 11.3 (3) より $g \circ f\colon U \to W$ も全単射線形写像，すなわち線形同型写像である (全単射写像の合成は再び全単射であることに注意)．よって，$U \simeq W$ である． □

同型なベクトル空間の間では一次独立な部分集合や基底は同型写像を通して一対一に対応する：

命題 12.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき以下が成立する．

(1) f が単射であるとき，$S \subset V$ が一次独立であれば，$f(S) := \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in S\} \subset W$ も一次独立である．

(2) f が全射であるとき，$S \subset V$ が $V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ を満たせば，$W = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(S)$ である．

(3) f が全単射，すなわち線形同型写像であるとき，B が V の基底であれば，$f(B)$ は W の基底である．

証明.

(1) $\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)\} \subset f(S)$ を $f(S)$ の任意の有限部分集合とする ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in S$)．これが一次独立であることを示せば良い．ある $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}$$

となったと仮定する．このとき f が線形写像であることより，左辺は $f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k)$ であるので，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \in \operatorname{Ker} f$$

である．ここで f は単射なので，命題 11.7 (2) より $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ であるから，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}.$$

いま $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset S$ は S の部分集合であるから仮定より一次独立なので，このとき $c_1 = \cdots = c_k = 0$. よって，$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)\}$ は W の一次独立な部分集合である．

(2) 第 11 回講義資料注意 2 と f の全射性より，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(S) = f(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S) = f(V) = W.$$

(3) B が V の基底で，f が全単射であるとき，(1) より $f(B)$ は W の一次独立な部分集合であり，(2) より $W = \operatorname{span}_{\mathbb{K}} f(B)$ である．よって， $f(B)$ は W の基底である． □

12.2 ベクトル空間の次元

本節では有限次元ベクトル空間という概念を導入し，それが同型の差を無視することにすると $\mathbb{K}^n$ で尽くされるということを述べる．これは有限次元ベクトル空間の分類とも言える．この事実は，これまで学んできた $\mathbb{K}^n$ における結果が様々な有限次元ベクトル空間に対して適用できるということを保証しており，非常に重要な結果である．

定義 12.5

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V が有限個の元からなる基底を持つとき，V を $\mathbb{K}$ **上の有限次元ベクトル空間**であるといい，有限個の元からなる基底を持たないとき V を $\mathbb{K}$ **上の無限次元ベクトル空間**と言う．

例 4. $\mathbb{K}^n$ は基本ベクトルからなる $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という基底を持ち，これは n 個の元からなるので，$\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間である．

例 5. m, n を正の整数としたとき，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ という基底をもつ．ただし，E_{ij} は (i, j) 成分が 1，その他の成分が全て 0 の $m \times n$ 行列を表す (第 10 回講義資料例 16)．B は mn 個の元からなるので，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間である．

例 6. k を 0 以上の整数としたとき，$\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ は $B = \{1, x, \dots, x^k\}$ という 基底を持つ (第 10 回講義資料例 17)．B は $k+1$ 個の元からなるので，$\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ は $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間である．

以下の定理は有限次元ベクトル空間が全て $\mathbb{K}^n$ という形のベクトル空間に同型であり，さらに基底の元の個数が常に一定であることを主張する．特に前半の事実は大雑把に言えば “一般の有限次元ベクトル空間も $\mathbb{K}^n$ と同様に扱える” ということを主張しており，これによってこれまで $\mathbb{K}^n$ で勉強してきたことが全ての有限次元ベクトル空間に対して応用できるということがわかる．

定理 12.6

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B を V の有限個の元からなる基底とする．$n := |B|$ とすると[*1]，以下が成立する．

(1) $V \simeq \mathbb{K}^n$.
(2) V の任意の基底 B' は $|B'| = n$ を満たす．

証明.

(1) $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ と書くと，命題 11.4 より線形写像 $F\colon V \to \mathbb{K}^n$, $G\colon \mathbb{K}^n \to V$ であって，各 $i = 1, \dots, n$ に対し，

$$F(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{e}_i \qquad G(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{b}_i$$

を満たすものが一意的に存在する．このとき定義より，各 $i = 1, \dots, n$ に対し，

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\boldsymbol{b}_i) &= G(F(\boldsymbol{b}_i)) = G(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{b}_i = \mathrm{id}_V(\boldsymbol{b}_i)\\(F \circ G)(\boldsymbol{e}_i) &= F(G(\boldsymbol{e}_i)) = F(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{e}_i = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(\boldsymbol{e}_i)\end{aligned}$$

となる．よって，命題 11.4 の後半の主張より，$G \circ F = \mathrm{id}_V, F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$(命題 11.3 (3) より $G \circ F, F \circ G$ も線形写像であることに注意)．これより，F, G は全単射であり，線形同型写像である．よって，$V \simeq \mathbb{K}^n$.

(2) B' を V の基底とする．(1) より線形同型写像 $f\colon V \to \mathbb{K}^n$ が存在するのでこれを一つとる．このとき，命題 12.4 (3) より $f(B')$ は $\mathbb{K}^n$ の基底となるが，命題 10.7 より $f(B')$ は n 個の元からなる．いま f は単射なので，このとき B' も n 個の元からなる．よって示すべきことは示された． □

注意 1. ここでは有限次元ベクトル空間に対して主張を証明したが，一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対して，B をその基底とすると，

$$f\colon \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}} \to V,\ (c_{\boldsymbol{b}})_{\boldsymbol{b}\in B} \mapsto \sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$$

が線形同型写像になることが命題 10.8 から示される．($\mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ のベクトル空間としての構造については第 10 回講義資料定義 10.3 の直前を参照．) 第 10 回講義資料 p.4 の上部で述べていることから，$n = |B|$ のときは $\mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ は $\mathbb{K}^n$ に同型であることが容易に示されるので，これによって定理 12.6 (1) の証明を与えても良い．同型 $V \simeq \mathbb{K}^{B,\mathrm{fin}}$ は V が無限次元ベクトル空間でも正しいので，この意味でこの同型の存在は定理 12.6 (1) の一般化と考えることもできる．

系 12.7

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V が無限個の元からなる基底を一つでも持てば，V は無限次元ベクトル空間である．

[*1] 集合 X に対して，$|X|$ は X の元の個数を表す．

証明. V が有限個の元からなる基底 B を持つとすると，定理 12.6 (2) より V の任意の基底は $|B| < \infty$ の元からなる．よって，このとき無限個の元からなる基底は持ち得ない．よって，V が無限個の元からなる基底を持つとき，V の有限個の元からなる基底は存在せず，V が無限次元である． □

定理 12.6 (2) はベクトル空間の次元が定義できることを保証している．

定義 12.8

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．B を V の基底とするとき，その元の個数 $|B|$ を V の $\mathbb{K}$ 上の**次元 (dimension)** と言い，$\dim_{\mathbb{K}} V$ と表す．なお，V が $\mathbb{K}$ 上の無限次元ベクトル空間であるときは，基底 B の元の個数は定義より無限なので $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ と書く．

注意 2 (次元の定義に関する重要な注意).

- まず，上のような定義で $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対して $\dim_{\mathbb{K}} V$ という意味のある値が定義できることは全く自明ではない．なぜなら，一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対しては無限に多くの基底の取り方があるからである．このため，例えば B, B' を V の基底としたとき，B の元の個数が 2 個，B' の元の個数が 3 個などということが生じてしまうのではないかという恐れがある．もしこういったことがあれば，取る基底によって $\dim_{\mathbb{K}} V$ は 2 と定義されたり 3 と定義されたりするので，$\dim_{\mathbb{K}} V$ という値があまり意味を持つ値にはならない．しかし，そういったことが無いということを保証しているのが定理 12.6 (2) なのである．これはひとたび V が n 個の元からなる基底を持つことが分かれば，V の任意の基底は n 個の元からなるということを述べている．これによって次元 $\dim_{\mathbb{K}} V$ の上の定義が意味のある値であることが保証されているのである．
- 定理 10.9 によって任意の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間は基底を持つので，任意のベクトル空間に対して $\mathbb{K}$ 上の次元は定まる．なお，自明なベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$ の基底は空集合 $\varnothing$ であると定義していたので，その元の個数は 0 であるから，$\dim_{\mathbb{K}}\{\mathbf{0}\} = 0$ である．
- 本講義では簡単のために，“無限 ∞ 同士の大きさの差” は考えず，一律に ∞ と書くことにする．しかし，実際には無限集合に対しても**濃度 (cardinality)** という元の個数を一般化した概念が定まる (例えば $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$)．より一般にはベクトル空間に対してその基底の濃度を次元と定義する．この場合，この定義が意味を持つものであることを保証するためにはやはり 定理 12.6 (2) の “濃度版” が必要となるが，実際はこれは正しい．

例 7. 例 4, 5, 6 より，以下のようになる．

- 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.
- 各 $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.
- 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq k} = k+1$.

さらに，$\mathbb{K}[x]$ は基底として $B = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を持つ (第 10 回講義資料例 17)．よって，系 12.7 より，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$ である．

例 8. $\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ を満たすが，スカラー倍で考えるスカラーの範囲を $\mathbb{R}$ に制限すると $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とも見られる．このとき，$\mathbb{C}$ の$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての基底の一つとして $\{1, i\}$ が取れる．なぜなら，$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi = 0$$

のとき $a = b = 0$ なので，$\{1, i\}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であり，さらに，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, i\} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

となって，$\{1, i\}$ は $\mathbb{C}$ を生成するためである．これより，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である．よって，定理 12.6 (1) とあわせると，$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ である．これは，複素数全体 $\mathbb{C}$ が複素平面 ($= \mathbb{R}^2$) という形で表されるという事実に対応して

いる．一般に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V はスカラー倍で考えるスカラーの範囲を $\mathbb{R}$ に制限することで $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と思うこともでき，$\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対しては，同様の考察で $2\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{R}} V$ が成立することがわかる．詳細は各自考えてみてほしい．

定理 12.6 (1) より，任意の $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対して $V \simeq \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V}$ が成立する．さらに命題 12.4 より，線形同型写像を通して V と $\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V}$ のそれぞれにおける一次独立な部分集合や基底という対象は一対一に対応するので，$\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V}$ に関する以前の定理 5.1 は直ちに一般の $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に一般化される．

定理 5.1 (若干言い回しを変えて再掲)

$S \subset \mathbb{K}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき，以下が成立する．

(1) $|S| \leq n$.
(2) $|S| < n$ のとき，$S \subset B$ となる $\mathbb{K}^n$ の基底 B が存在する．

定理 12.9

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．S を V の一次独立な部分集合とすると，以下が成立する．

(1) $|S| \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.
(2) $|S| < \dim_{\mathbb{K}} V$ のとき，$S \subset B$ となる V の基底 B が存在する．

注意 3. この定理も次元を基底の濃度で定義しておけば実は有限次元という仮定が無くても成立する．定理 12.9 (2) の方については，補足プリント『ベクトル空間における基底の存在について』の定理 A.1 で証明しているので気になる方は目を通していただきたい．

以下の定理は，同型なものを同一視すると有限次元ベクトル空間が次元で完全に分類できるということを主張している．

定理 12.10

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき，

$$V \simeq W \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W.$$

証明.

$\Rightarrow$ 方向 $V \simeq W$ なので，線形同型写像 $f\colon V \to W$ が存在する．B を V の基底とすると，命題 12.4 (3) より $f(B)$ は W の基底となるが，f の単射性より B の元の個数と $f(B)$ の元の個数は等しい．よってこのとき，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = |B| = |f(B)| = \dim_{\mathbb{K}} W.$$

$\Leftarrow$ 方向 定理 12.6 (1) より，このとき

$$V \simeq \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V} = \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} W} \simeq W.$$

よって，命題 12.3 (3) より，$V \simeq W$. □

注意 4. $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n$ のとき，V と W の間の線形同型写像は V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$，$W$ の基底 $\{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\}$ をとるごとに，

$$F(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{b}'_i \quad i = 1, \ldots, n$$

を満たす線形写像 $F\colon V \to W$ として構成できる (定理 12.6 (1) の証明参照)．$\{\boldsymbol{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間の基底の取り方は一般に無限にあるので，V と W の間の線形同型写像も無限に作ることができる．

注意 5. $\mathbb{K}$ 上の無限次元ベクトル空間に対してその次元を基底の濃度で定義しておけば，定理 12.10 は有限次元性の仮定を外しても成立する．

例 9. 定理 12.10 と例 7 より，任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，

- $\mathbb{K}[x]_{n-1} \simeq \mathbb{K}^n$
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}[x]_{mn-1} \simeq \mathbb{K}^{mn}$

などとなる．具体的な線形同型写像についても，注意 4 より，それぞれの基底を対応させる形で作れる．例えば，$\mathbb{K}^n$ は基本ベクトルからなる $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という基底を持ち，$\mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$ は $B' = \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ という基底を持つので，ここから

$$F(\boldsymbol{e}_i) = x^{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

を満たす線形同型写像 $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$ がただ一通りに構成できる．より具体的には，

$$F\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

とすれば良い．これは例 1 の線形同型写像の一般化である．なお，B と B' の元の対応のさせ方は必ずしも $\boldsymbol{e}_i \mapsto x^{i-1}$ とする必要はなく，$B \to B'$ が全単射な対応になっていれば何でも良い．例えば，$F'(\boldsymbol{e}_i) = x^{n-i}$ と対応させる同型

$$F'\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}[x]_{\leq n-1}, \quad \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right) \mapsto c_n + c_{n-1} x + \cdots + c_1 x^{n-1}$$

も存在する．