線形代数 II 第 13 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

今回はまず**次元定理**と呼ばれる線形写像の像と核の次元の関係に関する定理について証明を行い，その様々な応用について述べる．後半では本講義全体の後半部分の肝とも言える**表現行列**について解説を行う．これは大雑把に言えば，一般の線形写像を行列を用いて表現するという話である．表現行列の単元で学ぶ考え方は線形代数を様々な分野で応用する際に重要なものであると同時に，これまで学んできた行列の簡約化や対角化に対しても見通しの良い理解を与えるものである．是非この機会にしっかりと学んでもらいたい．

13.1 次元定理

定理 13.1(次元定理)

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$f\colon V \to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f.$$

証明． B_K を $\operatorname{Ker} f$ の基底，B_I を $\operatorname{Im} f$ の基底とする．$B_I \subset \operatorname{Im} f$ なので，任意の $\boldsymbol{b} \in B_I$ に対して，ある $\boldsymbol{v_b} \in V$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{v_b}) = \boldsymbol{b}$$

となる．ここで，

$$\widetilde{B}_I \coloneqq \{\boldsymbol{v_b} \mid \boldsymbol{b} \in B_I\}$$

とすると，$|\widetilde{B}_I| = |B_I|$ である．さらに，$f(\boldsymbol{v_b}) = \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{v_b} \notin \operatorname{Ker} f$ であるから，$B_K \cap \widetilde{B}_I = \varnothing$ である．あとは，

$$B \coloneqq B_K \cup \widetilde{B}_I \text{ が } V \text{ の基底であること}$$

を証明する．これが証明できれば，

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}} V = |B| &= |B_K \cup \widetilde{B}_I| \\ &= |B_K| + |\widetilde{B}_I| \quad (B_K \cap \widetilde{B}_I = \varnothing \text{なので}) \\ &= |B_K| + |B_I| = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f\end{aligned}$$

となり，定理が示される．

<u>B の一次独立性：</u> 任意の有限部分集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s\} \subset B_K$, $\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}\} \subset \widetilde{B}_I$ に対し, $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}, \dots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}\}$ が一次独立であることを示せばよい．ある $c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_t \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{u}_s + d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1} + \cdots + d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t} = \boldsymbol{0} \tag{13.1}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となったと仮定する．命題 11.2 (1) より $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので，このとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= f(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s+d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t})\\ &= c_1f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+c_sf(\boldsymbol{u}_s)+d_1f(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1})+\cdots+d_tf(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t})\\ &= c_1\mathbf{0}+\cdots+c_s\mathbf{0}+d_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+d_t\boldsymbol{b}_t \qquad (\boldsymbol{u}_j\in\operatorname{Ker}f \text{ より})\\ &= d_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+d_t\boldsymbol{b}_t.\end{aligned}$$

ここで，$\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_t\}\subset B_I$ なので $\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_t\}$ は一次独立であるから，このとき

$$d_1=\cdots=d_t=0.$$

これを (13.1) に代入すると，

$$c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s=\mathbf{0}$$

であるが，$\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s\}\subset B_K$ なので $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s\}$ は一次独立であるから，このとき

$$c_1=\cdots=c_s=0.$$

以上より，(13.1) は

$$c_1=\cdots=c_s=d_1=\cdots=d_t=0$$

を導くので，$\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}\}$ は一次独立である．これより，B の一次独立性が示された．

なお，定理 12.9 からこのとき $|B|<\dim_{\mathbb{K}}V<\infty$ なので，$B_K,\widetilde{B}_I,B_I$ は全て有限集合である．よって以降では，

$$B_K=\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s\},\quad B_I=\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_t\},\quad \widetilde{B}_I=\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1},\ldots,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}\}$$

と書く．

<u>B が V を生成すること：</u> $\boldsymbol{v}$ を V の任意の元としたとき，$\boldsymbol{v}$ が B の元の一次結合で書けることを示せばよい．$f(\boldsymbol{v})\in\operatorname{Im}f$ なので，$f(\boldsymbol{v})$ は B_I の元の一次結合として，

$$f(\boldsymbol{v})=d_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+d_t\boldsymbol{b}_t$$

と書ける．この $d_1,\ldots,d_t\in\mathbb{K}$ を用いて，

$$\boldsymbol{v}':=\boldsymbol{v}-d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}-\cdots-d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}$$

と置く．このとき，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v}-d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}-\cdots-d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t})\\ &= f(\boldsymbol{v})-d_1f(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1})-\cdots-d_t(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t})\\ &= f(\boldsymbol{v})-d_1\boldsymbol{b}_1-\cdots-d_t\boldsymbol{b}_t=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{v}'\in\operatorname{Ker}f$ なので，$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_s$ の一次結合として

$$\boldsymbol{v}'=c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s$$

と書ける．以上より，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}=c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_s\boldsymbol{u}_s+d_1\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_1}+\cdots+d_t\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{b}_t}$$

となるので，$\boldsymbol{v}$ は確かに B の元の一次結合で書けることがわかる．

以上より B が V の基底であることが分かったので，示すべきことは全て示された． □

注意 1. 次元定理より，線形写像 $f\colon V\to W$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Im}f=\dim_{\mathbb{K}}V-\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Ker}f$$

となることがわかる．これは，“f によって V から $\operatorname{Ker} f$ の分がつぶされて $\operatorname{Im} f$ が得られる” というようにとらえることができる．この主張は商ベクトル空間という概念を学ぶときちんと定式化され，

$$V/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

という同型として述べられる (左辺が商ベクトル空間)．商ベクトル空間は本講義では扱わないが重要な概念なので，気になる方は調べてみて欲しい．

注意 2. 次元定理は，右辺の和の計算を $\infty + m = m + \infty = \infty$ ($m \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) と解釈すれば，$\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ でも成立する．実際，上の証明において B_K, B_I の有限性は全く本質的ではない．

例 1. 線形写像

$$f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}),\quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

の像

$$\operatorname{Im} f := \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K} \right\}$$

の次元を計算してみよう．次元定理より，$\operatorname{Ker} f$ の次元がわかれば良い．

$$f\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 = 0 \\ 5c_2 + 4c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + 8c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この連立一次方程式を解いて，

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{K} \right\}.$$

よって，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 1$．これより，次元定理から，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^4 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3.$$

次元定理の様々な系

ここで，次元定理から直ちに導かれる様々な命題を列挙しておく．ここの命題は時間の都合上講義時間内に全てを解説することはできないと思われるが，次元定理の有用さおよびベクトル空間・線形写像の感覚を掴むのに良い命題だと思われるので，是非一度目を通して頂きたい．

系 13.2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$f\colon V \to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f.$$

また，等号成立の必要十分条件は f が単射であることである．

証明. 次元定理より，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$ だが，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \geq 0$ なので，$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$. さらに，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \iff \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 0 \iff \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \iff f \text{ は単射}$$

となる．なお，最後の同値性は命題 11.7 より従う． □

系 13.3

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，n を正の整数として $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を V の n 個の元とする．このとき，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \leq n.$$

さらに，等号成立の必要十分条件は $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が一次独立であることである．

証明. 命題 11.4 より，線形写像 $F\colon \mathbb{K}^n \to V$ であって，全ての $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$F(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{v}_i$$

を満たすものが一意的に存在する．このとき，

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{F(\boldsymbol{e}_1), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)\} \\
&= F(\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}) \quad (\text{第 11 回講義資料 p.9 注意 2 より}) \\
&= F(\mathbb{K}^n) = \operatorname{Im} F
\end{aligned}$$

となるので，系 13.2 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} F \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n.$$

さらに，等号成立の必要十分条件は F が単射，すなわち $\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{0}\}$ であるが，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{0}\} &\iff F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{ は } \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ のみ} \\
&\iff F(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0} \text{ となる } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \text{ は } x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ のみ} \\
&\iff x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \text{ となる } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \text{ は } x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ のみ} \quad (F(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{v}_i \text{より}) \\
&\iff \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \text{ は一次独立}
\end{aligned}$$

となるので，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が一次独立であることが等号成立の必要十分条件となる． □

系 13.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$f\colon V \to W$ を線形写像とすると，以下が成立する．

(1) f が全射のとき，$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} W$ である．

(2) f は単射のとき，$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} W$ である．

証明.

(1) f が全射のとき，$\operatorname{Im} f = W$ なので，系 13.2 より，$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} W$.

(2) f が単射であると仮定すると，系 13.2 より，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$ であるが，$\operatorname{Im} f$ は W の部分空間なので，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \leq \dim_{\mathbb{K}} W.$$

(ここの不等号については第 12 回本レポート課題解答問題 3 補足解説参照) 以上より，$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} W$． □

系 13.5

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ であるとする．$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) f が単射であるならば，f は線形同型写像である．つまり，このとき f の全射性は自動的に従う．
(2) f が全射であるならば，f は線形同型写像である．つまり，このとき f の単射性は自動的に従う．

証明．
(1)

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}} W &= \dim_{\mathbb{K}} V \quad (\text{仮定より}) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f \quad (f\ \text{の単射性と系 13.2より})\end{aligned}$$

である．ここで $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間なので，このとき $\operatorname{Im} f = W$ となる (第 12 回本レポート課題解答問題 3 補足解説参照)．よって，f は全射でもある．
(2) f が全射のとき，$\operatorname{Im} f = W$ なので，系 13.2 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} W$$

であるが，仮定より $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ なので，$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$．よって，系 13.2 より，$f$ は単射でもある． □

13.2 表現行列

ここからは一般の線形写像 $f\colon V \to W$ を行列を用いて表現するということを考える．これにより，様々な線形写像に関する計算 (例えば像・核の計算，$f\colon V \to V$ の n 回合成の計算 $f \circ \cdots \circ f$ 等) が行列の計算を用いて行えるようになり，これまで学んできた内容の適用範囲が大きく広がることになる．今回はまず線形写像からいかにして行列の情報を取り出すかということについて学ぼう．

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_j)$ は W の元であるので，基底の定義と命題 10.8 から $f(\boldsymbol{v}_j)$ は B_W の元の一次結合として，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \tag{13.2}$$

と一意的に書ける．命題 11.4 より，線形写像 $f\colon V \to W$ は $f(\boldsymbol{v}_j), j = 1, \ldots, n$ らから一意的に定まるので，これはすなわち，

$$\{a_{ij} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$$

という mn 個の $\mathbb{K}$ の元によって f が完全に指定されているということである．

定義 13.6

上の設定で (13.2) のようにして得られる mn 個の $\mathbb{K}$ の元 $\{a_{ij} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ に対し，(i, j) 成分が a_{ij} であるような行列を，

$$A(f; B_V, B_W) \coloneqq (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$$

と書く[*1]．この $A(f; B_V, B_W)$ を**基底 B_V, B_W に関する f の表現行列**という．

上での考察より，線形写像 $f\colon V \to W$ は V, W の基底 B_V, B_W を指定しておけば，表現行列 $A(f; B_V, B_W)$ より一通りに定まる．逆に任意の $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ に対して，命題 11.4 より，(13.2) を

[*1] $A(f; B_V, B_W)$ という記号はこの講義の中だけのものである．

満たす線形写像 $f\colon V\to W$ が一意的に定まる．定義より，この f に対しては，$A(f;B_V,B_W)=A$ である．ここでの考察から，B_V,B_W から定まる写像

$$\Psi_{B_V,B_W}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)\to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ f\mapsto A(f;B_V,B_W) \tag{13.3}$$

が全単射であるということがわかる (前半の文章 (「上での考察より，...」) が単射性の証明になっており，後半の文章 (「逆に任意の...」) が全射性の証明になっている)．ここで，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ は V から W への線形写像全体のなす集合，すなわち，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)\coloneqq\{f\colon V\to W \mid f \text{ は線形写像 }\}$$

である (第 11 回講義資料 p.5 注意 1 参照)．言葉で書くと，「n 次元ベクトル空間 V から m 次元ベクトル空間 W への線形写像はそれぞれの基底 B_V,B_W を固定すると (13.2) 式によって $m\times n$ 行列と一対一に対応する」ということになる．

例 2. $m\times n$ 行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

に対し，線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m, \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．$\mathbb{K}^n$ の基底として $E_n=\{\boldsymbol{e}_1^{(n)},\dots,\boldsymbol{e}_n^{(n)}\}$，$\mathbb{K}^m$ の基底として $E_m=\{\boldsymbol{e}_1^{(m)},\dots,\boldsymbol{e}_m^{(m)}\}$ を取り，E_n,E_m に関する f_A の表現行列を求めてみよう ($\boldsymbol{e}_j^{(n)}$ は n 次第 j 基本ベクトル，$\boldsymbol{e}_i^{(m)}$ は m 次第 i 基本ベクトル)．このとき，

$$f_A(\boldsymbol{e}_j^{(n)})=A\boldsymbol{e}_j^{(n)}=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}\boldsymbol{e}_1^{(m)}+a_{2j}\boldsymbol{e}_2^{(m)}+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{e}_m^{(m)}$$

となる．よって，定義より，

$$A(f_A;E_n,E_m)=(a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}=A$$

となる．つまり，f_A の標準的な基底に関する表現行列は A となるのである．一般に表現行列 $A(f;B_V,B_W)$ を求める際に，$f(\boldsymbol{v}_j)$ を B_W の元の一次結合で書いた際の係数を第 j 列として並べるか第 j 行として並べるかは覚え間違えがちであるが，この例を頭に入れておくと**第 j 列として並べるのが正しい**と覚えられるであろう．

例 3. V と W を $\dim_{\mathbb{K}}V=4,\dim_{\mathbb{K}}W=3$ であるような $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$B_V=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底，$B_W=\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ を W の基底とし，線形写像 $f\colon V\to W$ が

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1)&=\boldsymbol{w}_1+2\boldsymbol{w}_2+3\boldsymbol{w}_3\\ f(\boldsymbol{v}_2)&=\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2+2\boldsymbol{w}_3\\ f(\boldsymbol{v}_3)&=2\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+5\boldsymbol{w}_3\\ f(\boldsymbol{v}_4)&=3\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_3\end{aligned}$$

で定まっているとする．このとき，基底 B_V,B_W に関する f の表現行列は

$$A(f;B_V,B_W)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

である．

例 4. $\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ から $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ への微分写像

$$\frac{d}{dx}\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x)$$

を考える ($\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ や $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ という記号については第 9 回講義資料例 11 参照)．ここで，$\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ は $B = \{1, x, x^2, x^3\}$，$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ は $B' = \{1, x, x^2\}$ という基底を持っていたので，B, B' に関する $\frac{d}{dx}$ の表現行列を求めてみる．いま，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\frac{d}{dx}(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\frac{d}{dx}(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\frac{d}{dx}(x^3) &= 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$A\left(\frac{d}{dx}; B, B'\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

注意 3. (13.2) の関係を形式的に[*2]行列の掛け算のルールを用いて，

$$(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \cdots\ \boldsymbol{w}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \cdots\ \boldsymbol{w}_m) A(f; B_V, B_W)$$

というように書くこともある．この表記法を用いると，例 2, 3, 4 の状況はそれぞれ，

$$\begin{aligned}
&\left(f_A(\boldsymbol{e}_1^{(n)})\ f_A(\boldsymbol{e}_2^{(n)})\ \cdots\ f_A(\boldsymbol{e}_n^{(n)})\right) = \left(\boldsymbol{e}_1^{(m)}\ \boldsymbol{e}_2^{(m)}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_m^{(m)}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&(f(\boldsymbol{v}_1)\ f(\boldsymbol{v}_2)\ f(\boldsymbol{v}_3)\ f(\boldsymbol{v}_4)) = (\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\left(\frac{d}{dx}(1)\ \frac{d}{dx}(x)\ \frac{d}{dx}(x^2)\ \frac{d}{dx}(x^3)\right) = (1\ x\ x^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

というように書ける．特に 1 つめの物は普通の行列の等式となっており，最後のものも多項式を成分に持つ行列の普通の等式となっていることが見て取れるだろう．

命題 11.3 で線形写像の和，スカラー倍を定義してそれらが再び線形写像となることを見た．また，線形写像の合成が再び線形写像となることも証明した．これらの線形写像に関する操作を表現行列の操作として見ておこう．

[*2] $f(\boldsymbol{v}_j)$ や $\boldsymbol{w}_i$ は一般のベクトル空間の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^m$ の元ではないが形式的にこれを並べて，行列のように扱っているという意味．

命題 13.7

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V を V の基底，B_W を W の基底とする．このとき，以下が成立する．

(1) $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ に対して，

$$A(f + f'; B_V, B_W) = A(f; B_V, B_W) + A(f'; B_V, B_W).$$

すなわち，線形写像 f, f' の和 $f + f'$ の B_V, B_W に関する表現行列は，f の B_V, B_W に関する表現行列と f' の B_V, B_W に関する表現行列の和となる．

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), c \in \mathbb{K}$ に対して，

$$A(cf; B_V, B_W) = cA(f; B_V, B_W).$$

すなわち，線形写像 f の c 倍 cf の B_V, B_W に関する表現行列は，f の B_V, B_W に関する表現行列の c 倍となる．

(3) U を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B_U を U の基底とする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ に対し，

$$A(g \circ f; B_U, B_W) = A(g; B_V, B_W)A(f; B_U, B_V).$$

特に，$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ とすると，任意の正の整数 n に対し，

$$A(\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}; B_V, B_V) = A(f; B_V, B_V)^n.$$

証明． 以下では $B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}, B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ と書く．

(1)

$$A(f; B_V, B_W) = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}, \quad A(f'; B_V, B_W) = (a'_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$$

とすると，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i, \quad f'(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{w}_i.$$

このとき，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$(f + f')(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_j) + f'(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + a'_{ij})\boldsymbol{w}_i$$

であることから，$A(f + f'; B_V, B_W) = (a_{ij} + a'_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n} = A(f; B_V, B_W) + A(f'; B_V, B_W)$．

(2)

$$A(f; B_V, B_W) = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$$

とすると，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i.$$

このとき，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，

$$(cf)(\boldsymbol{v}_j) = cf(\boldsymbol{v}_j) = c \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m} ca_{ij}\boldsymbol{w}_i$$

であることから，$A(cf; B_V, B_W) = (ca_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n} = cA(f; B_V, B_W)$．

(3) $B_U=\{\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_\ell\}$ と書く．

$$A(f;B_U,B_V)=(a_{kj})_{k=1,\dots,n,j=1,\dots,\ell},\quad A(g;B_V,B_W)=(b_{ik})_{i=1,\dots,m,k=1,\dots,n}$$

とすると，各 $j=1,\dots,\ell$ に対し，

$$f(\boldsymbol{u}_j)=\sum_{k=1}^n a_{kj}\boldsymbol{v}_k,$$

各 $k=1,\dots,n$ に対し，

$$g(\boldsymbol{v}_k)=\sum_{i=1}^m b_{ik}\boldsymbol{w}_i.$$

このとき，各 $j=1,\dots,\ell$ に対し，

$$(g\circ f)(\boldsymbol{u}_j)=g(f(\boldsymbol{u}_j))=g\left(\sum_{k=1}^n a_{kj}\boldsymbol{v}_k\right)=\sum_{k=1}^n a_{kj}g(\boldsymbol{v}_k)=\sum_{k=1}^n a_{kj}\left(\sum_{i=1}^m b_{ik}\boldsymbol{w}_i\right)=\sum_{i=1}^m\left(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}\right)\boldsymbol{w}_i$$

であることから，$A(g\circ f;B_U,B_W)=(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,\ell}=A(g;B_V,B_W)A(f;B_U,B_V)$. □

この命題の系として，(13.3) の Ψ_{B_V,B_W} が実は線形写像であったことがわかる．

系 13.8

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V を V の基底，B_W を W の基底とする．このとき，

$$\Psi_{B_V,B_W}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)\to \mathrm{Mat}_{(\dim_{\mathbb{K}}W)\times(\dim_{\mathbb{K}}V)}(\mathbb{K}),\ f\mapsto A(f;B_V,B_W)$$

は線形同型写像である．特に，$\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)=\dim_{\mathbb{K}}V\cdot\dim_{\mathbb{K}}W$ である．

証明. Ψ_{B_V,B_W} が全単射写像であることはすでに (13.3) のところで見ているので，後は Ψ_{B_V,B_W} が線形写像であることを見れば良い．命題 13.7 (1), (2) より，任意の $f,f'\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W), c\in\mathbb{K}$ に対して，

$$\Psi_{B_V,B_W}(f+f')=A(f+f';B_V,B_W)=A(f;B_V,B_W)+A(f';B_V,B_W)=\Psi_{B_V,B_W}(f)+\Psi_{B_V,B_W}(f')$$
$$\Psi_{B_V,B_W}(cf)=A(cf;B_V,B_W)=cA(f;B_V,B_W)=c\Psi_{B_V,B_W}(f)$$

となるので，Ψ_{B_V,B_W} は確かに線形写像である． □

注意 4. Ψ_{B_V,B_W} は B_V,B_W の取り方を変えれば異なる写像となる．すなわち，「V の基底と W の基底をそれぞれ取るごとに，一つ線形同型写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Mat}_{(\dim_{\mathbb{K}}W)\times(\dim_{\mathbb{K}}V)}(\mathbb{K})$ が得られる」という状況になっている．

また以下の命題より，線形写像が同型であるかどうかは表現行列から計算可能である．

系 13.9

V と W を $\dim_{\mathbb{K}}V=\dim_{\mathbb{K}}W$ なる $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V を V の基底，B_W を W の基底とする．このとき，線形写像 $f\colon V\to W$ が線形同型写像であるための必要十分条件は $A(f;B_V,B_W)$ が正則行列であることである．

証明.

必要性： f が線形同型写像であるとき，命題 12.2 より $f^{-1}\colon W\to V$ も線形写像であることに注意する．このとき，命題 13.7 (3) より，

$$A(\mathrm{id}_V;B_V,B_V)=A(f^{-1}\circ f;B_V,B_V)=A(f^{-1};B_W,B_V)A(f;B_V,B_W)$$
$$A(\mathrm{id}_W;B_W,B_W)=A(f\circ f^{-1};B_W,B_W)=A(f;B_V,B_W)A(f^{-1};B_W,B_V)$$

となるが，$A(\mathrm{id}_V;B_V,B_V)$，$A(\mathrm{id}_W;B_W,B_W)$ は定義より共に $\dim_{\mathbb{K}}V(=\dim_{\mathbb{K}}W)$ 次単位行列．よって，

$$A(f^{-1};B_W,B_V)=A(f;B_V,B_W)^{-1}$$

となり，$A(f;B_V,B_W)$ は正則である．

十分性：系 13.8 より Ψ_{B_W,B_V} は全単射なので (B_V と B_W の順番に注意)，$A(f;B_V,B_W)$ が正則行列であるとき，$g=\Psi^{-1}_{B_W,B_V}(A(f;B_V,B_W)^{-1})$ となる $g\colon W\to V$ が存在する．定義より，$A(g;B_W,B_V)=A(f;B_V,B_W)^{-1}$ である．このとき，命題 13.7 (3) より，

$$\begin{aligned}
A(g\circ f;B_V,B_V)&=A(g;B_W,B_V)A(f;B_V,B_W)=A(f;B_V,B_W)^{-1}A(f;B_V,B_W)=I_{\dim_{\mathbb{K}}V}\\
A(f\circ g;B_W,B_W)&=A(f;B_V,B_W)A(g;B_W,B_V)=A(f;B_V,B_W)A(f;B_V,B_W)^{-1}=I_{\dim_{\mathbb{K}}V}=I_{\dim_{\mathbb{K}}W}
\end{aligned}$$

となる．表現行列の定義より，このとき任意の $\boldsymbol{v}\in B_V,\boldsymbol{w}\in B_W$ に対し，

$$(g\circ f)(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}=\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}),\quad (f\circ g)(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}=\mathrm{id}_W(\boldsymbol{w})$$

となるので，命題 11.4 より，$g\circ f=\mathrm{id}_V, f\circ g=\mathrm{id}_W$．よって，$g=f^{-1}$ となり，f は線形同型写像となる．
□

例 5. 次のような写像を考える．

$$F\colon\mathbb{K}[x]_{\leq 2}\to\mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x)\mapsto(1+x+x^2)f''(x)+2xf'(x)+f(1).$$

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分したもの，$f''(x)$ は $f(x)$ を 2 階微分したものである．例えば，

$$F(1+3x+x^2)=(1+x+x^2)\cdot 2+2x(3+2x)+(1+3\cdot 1+1^2)=7+8x+6x^2$$

である．このとき，F は線形写像である (第 11 回本レポート課題解答問題 3 補足解説参照)．この線形写像 F が線形同型写像であることを系 13.9 を用いて示そう． $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底の 1 つとして $B=\{1,x,x^2\}$ が取れる．このとき，

$$\begin{aligned}
F(1)&=(1+x+x^2)\cdot 0+2x\cdot 0+1=1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2\\
F(x)&=(1+x+x^2)\cdot 0+2x\cdot 1+1=1+2x=1\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2\\
F(x^2)&=(1+x+x^2)\cdot 2+2x\cdot 2x+1=3+2x+6x^2=3\cdot 1+2\cdot x+6\cdot x^2
\end{aligned}$$

より，

$$A(F;B,B)=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}$$

である．$|A(F;B,B)|=1\cdot 2\cdot 6=12\neq 0$ より，$A(F;B,B)$ は正則なので，系 13.9 より F は線形同型写像である．

例 6. 例 5 で見た F は定義域と終域がいずれも $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ である線形写像なので，任意の正の整数 n に対し，F を n 回合成するということが考えられる．そこで F を一般の元 $a+bx+cx^2$ に n 回施した

$$F^n(a+bx+cx^2):=(\underbrace{F\circ\cdots\circ F}_{n\text{ 個}})(a+bx+cx^2)$$

がどうなるかということを表現行列を用いることで計算してみよう．$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底として $B=\{1,x,x^2\}$ を取る．このとき，

$$A(\underbrace{F\circ\cdots\circ F}_{n\text{ 個}};B,B)$$

を求めれば良い．命題 13.7 (3) より，

$$A(\underbrace{F\circ\cdots\circ F}_{n\text{ 個}};B,B)=A(F;B,B)^n.$$

であったので，結局

$$A(F;B,B)^n=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}^n$$

が求まれば良い．このためには $A(F;B,B)$ の対角化とそれに用いる正則行列 P を求めれば良いのであった．以下見やすさのため，$A(F;B,B)$ を単に A と書く．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -3 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix} \right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$

となるので，A の固有値は $1,2,6$ である．A は 3 つの相異なる固有値を持つことより，対角化可能である．

固有値 1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，その解の全体は，

$$V_A(1) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 2 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，その解の全体は，

$$V_A(2) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，固有値 2 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 6 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(6I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，その解の全体は，

$$V_A(6) = \left\{ c\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，固有値 6 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ が取れる．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} A(\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n\text{ 個}}; B, B) = A^n &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & -10 + 10 \cdot 2^n & -2 - 5 \cdot 2^n + 7 \cdot 6^n \\ 0 & 10 \cdot 2^n & -5 \cdot 2^n + 5 \cdot 6^n \\ 0 & 0 & 10 \cdot 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる．これより，

$$\begin{aligned} F^n(1) &= \frac{10}{10} \cdot 1 = 1 \\ F^n(x) &= \frac{1}{10}((-10 + 10 \cdot 2^n) \cdot 1 + 10 \cdot 2^n \cdot x) = (-1 + 2^n) + 2^n x \\ F^n(x^2) &= \frac{1}{10}((-2 - 5 \cdot 2^n + 7 \cdot 6^n) \cdot 1 + (-5 \cdot 2^n + 5 \cdot 6^n) \cdot x + 10 \cdot 6^n \cdot x^2) \\ &= \left(\frac{-2 + 7 \cdot 6^n}{10} - 2^{n-1} \right) + (-2^{n-1} + 3 \cdot 6^{n-1})x + 6^n x^2. \end{aligned}$$

よって，

$$F^n(a + bx + cx^2) = a + (-1 + 2^n)b + \left(\frac{-2 + 7 \cdot 6^n}{10} - 2^{n-1} \right) c + (2^n b + (-2^{n-1} + 3 \cdot 6^{n-1})c)x + 6^n cx^2$$

となることがわかる．F を n 回施すという複雑な操作の計算が，表現行列の考え方を用いることで行列の n 乗計算に帰着され，行列の対角化を応用することで見事計算できたのである．