線形代数 II 第 14 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V, B_W をそれぞれ V, W の基底とする．前回の講義で，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，基底 B_V, B_W に関する f の表現行列 $A(f; B_V, B_W)$ を対応させる方法を学び，線形写像の和・スカラー倍・合成が表現行列の計算で計算できるということを学んだ．ここで，同じ線形写像 $f\colon V \to W$ であっても V, W の基底として別のもの B'_V, B'_W を取れば対応する表現行列 $A(f; B'_V, B'_W)$ は $A(f; B_V, B_W)$ とは異なるものになる．そこで，今回はまず基底を取り替えたときに表現行列がどのように変化するかということについて学ぶ．その後，表現行列を用いて一般の線形写像の像と核を求める方法について述べ，本講義の締めくくりとする．なお，今回の講義は最終回なので，資料の後半には講義の時間中には扱えないと思われるが関連する大事な内容を解説している．興味のある方は是非目を通して頂きたい．

14.1　基底の変換行列

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B, B' を V の基底とする．まずは，B, B' の関係を表す方法について学ぼう．

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \qquad\qquad B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$$

と書く．B は V の基底であり，$B' \subset V$ なので，各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，ある $p_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$ が一意的に存在して，

$$\boldsymbol{v}'_j = p_{1j}\boldsymbol{v}_1 + p_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i \tag{14.1}$$

と書ける (命題 10.8 参照)．

定義 14.1

上の設定で，(14.1) で得られる p_{ij} を (i, j) 成分とする n 次正方行列を

$$P(B', B) \coloneqq \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

と書く．この $P(B', B)$ を B から B' への**基底の変換行列**という*1．

2 つの基底の関係 (14.1) は，形式的に*2行列の掛け算のルールを用いて，

$$(\boldsymbol{v}'_1\ \boldsymbol{v}'_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)P(B', B) \tag{14.2}$$

というように書くこともある．

---

* *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 基底の変換行列に $P(B', B)$ という記号を用いるのはこの講義におけるルールで，この記号が一般に定着しているわけではない．

*2 $\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}'_j$ は一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の元なので，必ずしも数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の元ではないが，形式的にこれを並べて行列のように扱っているという意味．V が $\mathbb{K}^n$ のときは，通常の意味での行列の等式として意味を持つことにも注意しよう．

例 1. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間を $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ と書く．このとき，$B = \{1, x, x^2\}, B' = \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$ は共に $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底である[*3]．このとき，

$$\begin{aligned} -3 + 2x + 2x^2 &= -3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ x - x^2 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 \\ -1 + x - x^2 &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1) \cdot x^2 \end{aligned}$$

なので，B から B' への基底の変換行列は，

$$P(B', B) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．(14.2) の表記を用いると，

$$\begin{pmatrix} -3 + 2x + 2x^2 & x - x^2 & -1 + x - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．

例 2. $B' = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底とする．このとき，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$\boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$\boldsymbol{p}_j = p_{1j}\boldsymbol{e}_1 + p_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

となるので，$B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ から B' への基底の変換行列は，

$$P(B', B) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$$

である．

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B, B' を V の基底とする．B から B' への基底の変換行列 $P(B', B)$ を線形写像の表現行列として解釈してみよう．恒等写像 $\mathrm{id}_V \colon V \to V,\ \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ は線形写像であるが，(14.1) 式の左辺は $\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}'_j)$ なので，(14.1) 式は基底 B', B に関する id_V の表現行列 $A(\mathrm{id}_V; B', B)$ の導出に用いる式に他ならない (第 13 回講義資料 p.5 (13.2) 式参照)．これより，以下の命題が従う．

命題 14.2

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B, B' を V の基底とする．このとき，V 上の恒等写像を $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ と書くと，

$$P(B', B) = A(\mathrm{id}_V; B', B).$$

特に，

(1) B'' も V の基底であるとすると，$P(B'', B) = P(B', B)P(B'', B')$.

(2) $P(B', B)$ は正則行列であり，$P(B', B)^{-1} = P(B, B')$.

[*3] B' が $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であることは以下のようにわかる．まず，B' が一次独立であることさえ示せば，系 13.3 より，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{span}_{\mathbb{K}} B' = 3$ であることがわかる．一方で $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = 3$ であることは既に知っているので，このとき第 12 回本レポート課題問題 3 補足解説より，$\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B' = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ は自動的に従う．よって，B' の一次独立性のみ調べれば良いが，実はこれは第 10 回講義資料例 3 で既に確かめている．

証明.「特に,」以降の主張を証明しておこう．まず (1) については，命題 13.7 (3) より，

$$P(B', B)P(B'', B') = A(\mathrm{id}_V; B', B)A(\mathrm{id}_V; B'', B') = A(\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V; B'', B) = A(\mathrm{id}_V; B'', B) = P(B'', B)$$

となることより従う．これより，

$$P(B', B)P(B, B') = P(B, B) = I_{\dim_{\mathbb{K}} V}, \quad P(B, B')P(B', B) = P(B', B') = I_{\dim_{\mathbb{K}} V}$$

となるので，$P(B', B)^{-1} = P(B, B')$ であることがわかる．よって，(2) も証明された． □

注意 1. $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の基底 B, B', B'' を

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \qquad B' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\} \qquad B'' = \{\boldsymbol{v}''_1, \ldots, \boldsymbol{v}''_n\}$$

と書くことにする．このとき，(14.2) の表記法を用いれば，命題 14.2 の (1) の主張は，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P(B', B),\ (\boldsymbol{v}''_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}''_n) = (\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n)P(B'', B') \\ \Rightarrow\ &(\boldsymbol{v}''_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}''_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P(B', B)P(B'', B')\end{aligned}$$

であるということを述べており，命題 14.2 の (2) の主張は，

$$(\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P(B', B) \ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n)P(B', B)^{-1}$$

であるということを述べている．これより，(14.2) の表記法において右から正則行列を掛けるという操作は普通の行列の計算のように自然に行ってよいということがわかる．

ここで冒頭の導入で述べた「基底を取り直した際に線形写像の表現行列がどのように変わるか」という問いに答えよう．

定理 14.3

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V, B'_V を V の基底，B_W, B'_W を W の基底とする．このとき，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$A(f; B'_V, B'_W) = P(B_W, B'_W)A(f; B_V, B_W)P(B'_V, B_V).$$

注意 2. 定理 14.3 は記号がやや煩雑なので，第 13 回講義資料 p.7 注意 3 および (14.2) で述べた表記法を用いて，記号を簡略化して述べると以下のようになる：

$$B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \qquad B'_V = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\} \qquad B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\} \qquad B'_W = \{\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$$

とすると，

$$(f(\boldsymbol{v}_1) \ \cdots \ f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m)A, \quad (\boldsymbol{v}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)P, \quad (\boldsymbol{w}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{w}'_m) = (\boldsymbol{w}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m)Q$$

であるとき，

$$(f(\boldsymbol{v}'_1) \ \cdots \ f(\boldsymbol{v}'_n)) = (\boldsymbol{w}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{w}'_n)Q^{-1}AP$$

である $(A = A(f; B_V, B_W), P = P(B'_V, B_V), Q^{-1} = P(B'_W, B_W)^{-1} = P(B_W, B'_W))$．このように見るとこの定理は非常に自然な主張であることがわかる．

定理 14.3 の証明. 命題 14.2 と命題 13.7 (3) より，

$$\begin{aligned}P(B_W, B'_W)A(f; B_V, B_W)P(B'_V, B_V) &= A(\mathrm{id}_W; B_W, B'_W)A(f; B_V, B_W)A(\mathrm{id}_V; B'_V, B_V) \\ &= A(\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V; B'_V, B'_W) = A(f; B'_V, B'_W)\end{aligned}$$

□

例 3. 1 次以下，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{K}[x]$ の部分空間をそれぞれ $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}, \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ と書く．ここで，

$$B_1 \coloneqq \{1, x\}, \quad B_1' \coloneqq \{1+x, x\}, \quad B_2 \coloneqq \{1, x, x^2\}, \quad B_2' \coloneqq \{-1+x^2, -x+x^2, x^2\}$$

とすると，B_1, B_1' は $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ の基底，B_2, B_2' は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底となる[*4]．さらに，

$$\begin{pmatrix} 1+x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1+x^2 & -x+x^2 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$P(B_1', B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(B_2', B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である．ここで線形写像 $F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ を

$$f(x) \mapsto xf(x) - f(x)$$

で定義する．このとき，

$$\begin{aligned} F(1) &= x - 1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x) &= x^2 - x = 0\cdot 1 + (-1)\cdot x + 1\cdot x^2 \end{aligned}$$

となるので，F の B_1, B_2 に関する表現行列は，

$$A(F; B_1, B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．一方，定理 14.3 より，F の B_1', B_2' に関する表現行列は，

$$\begin{aligned} A(F; B_1', B_2') &= P(B_2', B_2)^{-1} A(F; B_1, B_2) P(B_1', B_1) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14.2　$\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間へ

最後に本節では $\mathbb{K}^n$ で学んだ内容を用いて $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V における計算を行う例をいくつか見る．ここでは単なる適用範囲の拡張だけではなく，これまで学んできた $\mathbb{K}^n$ における内容をベクトル空間論の視点から見通し良くとらえなおすということも行う．例えば，$m \times n$ 行列 A に対して，

- 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度 =「$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体をあるベクトルらの一次結合で表示するのに必要なベクトルらの個数の最小数 (すなわち解をベクトル表示する際の最小パラメータ数)」
- A のランク $\operatorname{rank} A$ =「A を行基本変形で簡約化した際に最終的に得られる簡約階段行列の階段の数」

であったが，これらがそれぞれある線形写像 f_A の核，像の次元という言い方で一言で述べられるようになる (定理 14.6)．これは，単に言い方が短くなるというだけでなく，例えばこれらの計算にベクトル空間論 (次元定理等) が使える，より一般のベクトル空間に対しても類似の概念が定義できるというような意味でも重要なとらえ方となる．

[*4] B_1' が $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ の基底，B_2' が $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であることは各自確認せよ．p.2 下部の注釈も参考にすること．

以下では $m\times n$ 行列 A に対し，f_A と書くと常に線形写像

$$f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$$

を表すことにする．また，$\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間 V とその基底 $B=\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ に対し，ψ_B と書くと常に線形同型写像

$$\psi_B\colon \mathbb{K}^n\xrightarrow{\sim} V,\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto x_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{b}_n$$

を表すことにする[*5]．ψ_B は言葉で書くと，「n 個の数から，それらを係数とする B の元の一次結合を与える写像」である．逆写像 ψ_B^{-1} は「V の元を B の元の一次結合として書いたとき，その係数のデータを取り出す写像」である．

まず，線形写像の表現行列の再解釈を与えよう．

命題 14.4

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，B_V を V の基底，B_W を W の基底とする．このとき，線形写像 $f\colon V\to W$ に対し，

$$f\circ\psi_{B_V}=\psi_{B_W}\circ f_{A(f;B_V,B_W)}.$$

図式で表すと以下のようになっている．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "f"] & & W \\
\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V} \arrow[u, "\psi_{B_V}", "\wr"'] \arrow[rr, "f_{A(f;B_V,B_W)}"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} W} \arrow[u, "\psi_{B_W}", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

証明． $f\circ\psi_{B_V},\psi_{B_W}\circ f_{A(f;B_V,B_W)}$ はいずれも $\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}V}$ から W への線形写像なので，命題 11.4 より，任意の $j=1,\dots,\dim_{\mathbb{K}}V$ に対して，

$$(f\circ\psi_{B_V})(\boldsymbol{e}_j)=(\psi_{B_W}\circ f_{A(f;B_V,B_W)})(\boldsymbol{e}_j)$$

であることを示せば良い．$\dim_{\mathbb{K}}V=n,\dim_{\mathbb{K}}W=m$ として，

$$B_V=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\},\quad B_W=\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m\},\quad A(f;B_V,B_W)=(a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$$

と書くと，各 $j=1,\dots,n$ に対し，

$$\begin{aligned}
(f\circ\psi_{B_V})(\boldsymbol{e}_j)&=f(\psi_{B_V}(\boldsymbol{e}_j))=f(\boldsymbol{v}_j)=\sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{w}_i,\\
(\psi_{B_W}\circ f_{A(f;B_V,B_W)})(\boldsymbol{e}_j)&=\psi_{B_W}(f_{A(f;B_V,B_W)}(\boldsymbol{e}_j))=\psi_{B_W}\left(\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\right)=\sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{w}_i.
\end{aligned}$$

よって，示すべきことは示された． □

[*5] ψ_B が線形同型写像であることは，ψ_B が $\psi_B(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{b}_i, i=1,\dots,n$ を満たす線形写像であることからわかる．第 12 回講義資料 p.6 注意 4 参照．また，非常に細かい注意であるが，これまで「基底」と言った時に B の元に $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ のように 1 から n の番号がついているとは仮定していなかった．しかし，ψ_B の定義においては，第 i 成分の数をどの元の係数と思うかというところで番号付けは必要になるので，以降では適当に番号を付けて考えるということにする．実はこの注意は表現行列の定義の時点で「どの係数を第 (i,j) 成分と思うか」というところで必要になるので本来はそこでしておくべきであったが，説明が煩雑になりすぎるのを避けるため，基底を具体的に書いたときに左から順番に番号を付けると暗に仮定していた．以降でもこのように仮定して話を進めることにする．

これより，一般の線形写像の像や核の計算は f_A の像や核の計算に帰着できるということがわかる．

命題 14.5

V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし．B_V を V の基底，B_W を W の基底とする．このとき，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\operatorname{Im} f = \psi_{B_W}(\operatorname{Im} f_{A(f;B_V,B_W)}), \qquad \operatorname{Ker} f = \psi_{B_V}(\operatorname{Ker} f_{A(f;B_V,B_W)}).$$

証明． 以下では，$A(f;B_V,B_W)$ を単に A と書くことにする．命題 14.4 より，

$$f = \psi_{B_W} \circ f_A \circ \psi_{B_V}^{-1}$$

であることに注意すると以下のように計算できる．なお，以下では，混乱を避けるためにベクトル空間 X における零元 $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}_X$ というように書くことにする．

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = (\psi_{B_W} \circ f_A \circ \psi_{B_V}^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \psi_{B_W}^{-1}(\boldsymbol{w}) = (f_A \circ \psi_{B_V}^{-1})(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} V} \text{が存在して，} \psi_{B_W}^{-1}(\boldsymbol{w}) = f_A(\boldsymbol{x})\} \quad (\psi_{B_V}^{-1} \text{ は全射なので}) \\
&= \{\boldsymbol{w} \in W \mid \psi_{B_W}^{-1}(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Im} f_A\} = \psi_{B_W}(\operatorname{Im} f_A). \\
\operatorname{Ker} f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\psi_{B_W} \circ f_A \circ \psi_{B_V}^{-1})(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f_A(\psi_{B_V}^{-1}(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} W}}\} \quad (\psi_{B_W}^{-1}(\mathbf{0}_W) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} W}} \text{ なので}) \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \psi_{B_V}^{-1}(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f_A\} = \psi_{B_V}(\operatorname{Ker} f_A).
\end{aligned}$$

□

命題 14.5 より，V, W の基底が取れている状況だと，線形写像 $f\colon V \to W$ の像や核は $f_{A(f;B_V,B_W)}$ の像や核が具体的に求められれば具体的に求められるということがわかる．ここで，一般に A を $m \times n$ 行列として f_A の像や核の基底を求めるアルゴリズムを見ておこう．

f_A の核の基底の計算方法について

$$\operatorname{Ker} f_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

なので $\operatorname{Ker} f_A$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体のなす空間であるが，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$ となるので，ある $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A} \in \mathbb{K}^n$ が存在して，

$$\operatorname{Ker} f_A = \{c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{n-\operatorname{rank} A}\boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A} \mid c_1, c_2, \ldots, c_{n-\operatorname{rank} A} \in \mathbb{K}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A}\}$$

となる．ここで定理 5.7 より，このとき $B = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{n-\operatorname{rank} A}\}$ は自動的に一次独立となる．よって，B は $\operatorname{Ker} f_A$ を生成する一次独立な $\operatorname{Ker} f_A$ の部分集合となるので，$\operatorname{Ker} f_A$ の基底である (例 4 参照)．

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を行基本変形による A の簡約化を用いて解くと，その一般解は解の自由度の個数のあるベクトルの一次結合全体として書けるが，そこで用いられるベクトルのなす集合が $\operatorname{Ker} f_A$ の基底の一つである．なおこのことから以下の事実もわかる．

定理 14.6

A を $m \times n$ 行列としたとき，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A, \quad \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A.$$

さらに，V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし．B_V を V の基底，B_W を W の基底とすると，線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A(f;B_V,B_W), \quad \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = \dim_{\mathbb{K}} V - \operatorname{rank} A(f;B_V,B_W).$$

証明. $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rank} A$ は上の考察で見たとおりである．次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - (n - \operatorname{rank} A) = \operatorname{rank} A.$$

後半の有限次元ベクトル空間に対する主張は，命題 14.5 と線形同型写像が m 次元部分空間を m 次元部分空間に移すということ (命題 12.4 参照) から従う． □

定理 14.6 より，

$$\begin{aligned} &\text{連立一次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解の自由度} &&= \ker f_A \text{の次元} \\ &A \text{ のランク } \operatorname{rank} A &&= \operatorname{Im} f_A \text{の次元} \end{aligned}$$

というようにこれまで学んできた値を線形写像の像や核の次元としてとらえなおすことができる．さらに発展させて，一般の線形写像に対してもランクを以下のように定義する．

定義 14.7

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f \coloneqq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

とし，これを f の**ランク (または階数)** という．

f_A の像の基底の計算方法について

A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くと (つまり $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$)，第 11 回講義資料例 9 より，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$$

であった．ここで，定理 14.6 より，$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$ なので，もし $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ から $\operatorname{rank} A$ 個の元からなる一次独立な元の組 $\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\}$ を取り出すことができれば，それが $\operatorname{Im} f_A$ の基底となる．実際，このとき系 13.3 より，

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\} = \operatorname{rank} A = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A$$

となるので，第 12 回本レポート課題解答問題 3 補足解説で述べた考察により，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\} = \operatorname{Im} f_A$ となって，$\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\}$ が $\operatorname{Im} f_A$ を生成することも導けるためである．

ここで，一般に $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{K}^m, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ と m 次正則行列 P に対し，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1P\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_kP\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

なので[*6]，一次独立性の定義より，

$$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \text{ は一次独立} \quad \Leftrightarrow \quad \{P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_k\} \text{ は一次独立}$$

となることに注意する．ここで，$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ に行基本変形を繰り返し行うという操作は A に左からある m 次正則行列 P を掛けることで実現されるのであった[*7]．これより，A を行基本変形で簡約化して得られる簡約階段行列を A' とすると，ある m 次正則行列 P が存在して，

$$PA = (P\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ P\boldsymbol{a}_n) = A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

[*6] $\Rightarrow$ 方向は両辺に左から P を掛ければ得られ，$\Leftarrow$ 方向は両辺に左から P^{-1} を掛ければ得られる．

[*7] ここでは，基本変形の各操作に対応する正則行列の具体形は必要ないので，その解説は紙面の都合上省略する．線形代数 I の講義内容を復習してもらいたい．あるいは Wikipedia の「行列の基本変形」のページでもその具体形は容易に見つけることができる (便利な時代ですね)．

というようになる．ここで，簡約階段行列において「新たな段」(上の行列の緑の部分がある列) が現れる列は行列のランクの定義から $\operatorname{rank} A$ 個存在するが，それを左から順に第 $j_1, \dots, j_{\operatorname{rank} A}$ 列とする．このとき，各 $k = 1, \dots, \operatorname{rank} A$ に対して，

$$P\boldsymbol{a}_{j_k} = \boldsymbol{e}_k$$

となるので，$\{P\boldsymbol{a}_{j_1}, \dots, P\boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\}$ は一次独立である．よって，上の考察からこのとき

$$\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{j_{\operatorname{rank} A}}\}$$

が一次独立となり，これが $\operatorname{Im} f_A$ の基底の一つとなる (例 4 参照).

注意 3. $\operatorname{Im} f_A$ の基底の別の求め方として列基本変形を用いるものもある．2020 年度はこの方法で授業を行ったので，こちらも気になる方は私 (大矢) の個人ホームページから 2020 年度線形代数 II 第 13 回講義資料の p.4–6 を見ていただきたい．

例 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

として，線形写像

$$f_A \colon \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^4,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき $\operatorname{Ker} f_A, \operatorname{Im} f_A$ の基底を具体的に求めてみよう．A を行基本変形で簡約化すると以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4 行に加える}]{\text{第 1 行の 1 倍,2 倍,}-1\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,4 行に加える}]{\text{第 2 行の 1 倍,}-1\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,4 行に加える}]{\text{第 3 行の}-3\text{ 倍,}-1\text{ 倍,3 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この結果を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと，

$$\operatorname{Ker} f_A = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

となるので，$\operatorname{Ker} f_A$ の基底の一つとして，

$$B_{\operatorname{Ker} f_A} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる．また，上の簡約階段行列において新たな段が生じているのは第 1, 3, 5 列目なので，A の第 1, 3, 5 列目の列ベクトルを抜き出すことで，$\operatorname{Im} f_A$ の基底の一つ

$$B_{\operatorname{Im} f_A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が得られる．

ここで，例えば線形写像 $F \colon \mathbb{K}[x]_{\leq 4} \to \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ を

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \mapsto \begin{pmatrix} c_0 + 2c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 & -c_0 - 2c_1 + 2c_2 + 4c_3 - c_4 \\ -2c_0 - 4c_1 + 2c_2 + 2c_3 - 3c_4 & c_0 + 2c_1 + 2c_3 \end{pmatrix}$$

と定義すると，$\mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ の基底 $B_1 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底 $B_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ に関する F の表現行列は

$$A(F; B_1, B_2) = A$$

を満たす．これより，命題 14.5 から，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} F &= \psi_{B_2}(\operatorname{Im} f_A) = \psi_{B_2}\left(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_{\operatorname{Im} f_A}\right) \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}c_1 - c_2 + 2c_3 & -c_1 + 2c_2 - c_3\\ -2c_1 + 2c_2 - 3c_3 & c_1\end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\right\}.\end{aligned}$$

となり，$\operatorname{Im} F$ の基底の一つとして，$\psi_{B_2}(B_{\operatorname{Im} f_A}) = \{\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1&2\\2&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-3&0\end{smallmatrix}\right)\}$ が取れる．特に，$\operatorname{rank} F = 3$ である．同様に，

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} F &= \psi_{B_1}(\operatorname{Ker} f_A) = \psi_{B_1}\left(\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_{\operatorname{Ker} f_A}\right) \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\left\{-2 + x, -2 - 3x^2 + x^3\right\} = \left\{-2c_1 - 2c_2 + c_1 x - 3c_2 x^2 + c_2 x^3 \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{K}\right\}.\end{aligned}$$

となり，$\operatorname{Ker} F$ の基底の一つとして，$\psi_{B_1}(B_{\operatorname{Ker} f_A}) = \left\{-2 + x, -2 - 3x^2 + x^3\right\}$ が取れる．

(以降の内容は講義時間中には時間の都合上扱えないと思われるが，いずれも今後皆様が出会う可能性の高い大事な話である．是非眺めて貰いたい．)

14.3　補足：線形変換

線形写像のうち定義域と終域が同じもの $f\colon V \to V$ を以下では**線形変換**と呼ぶ．線形変換については，本講義の前半で扱った固有値・固有ベクトル・固有空間の概念が自然に拡張される．

定義 14.8

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．$\mathbf{0}$ でない元 $\boldsymbol{v} \in V$ が，ある $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

を満たすとき，λ を **f の固有値**，$\boldsymbol{v}$ を **f の固有値 λ の固有ベクトル**という．さらに，$\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，

$$V_f(\lambda) := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

とし，λ が f の固有値であるとき，$V_f(\lambda)$ を **f の固有値 λ の固有空間**という．

注意 4. 定義 14.8 で A を n 次正方行列とし，

$$f = f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

とすると，f_A の固有値，固有ベクトル，固有空間は A の固有値，固有ベクトル，固有空間に他ならない (定義 2.1，定義 5.4)．

注意 5. 命題 11.2 (1) より，任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ なので，任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して，$\mathbf{0} \in V_f(\lambda)$ である．よって，$V_f(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることと，λ が f の固有値であることは同値である．

線形変換の固有値・固有ベクトル・固有空間も表現行列を通してこれまでに学んだ n 次正方行列の固有値・固有ベクトル・固有空間の計算に帰着されることを説明しよう．以下では，B を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V の基底としたとき，線形変換 $f\colon V \to V$ の B, B に関する表現行列を，

$$A(f; B) := A(f; B, B)$$

と書くことにし，単に**線形変換 $f\colon V \to V$ の B に関する表現行列**ということにする．

命題 14.9

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B を V の基底，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し，

$$V_f(\lambda) = \psi_B(V_{A(f;B)}(\lambda))$$

である (右辺の記号については定義 5.4 参照)．すなわち，f の固有値 λ の固有ベクトルは f の B に関する表現行列 $A(f;B)$ の固有値 λ の固有ベクトルを ψ_B で送ったもので全てである．

証明. 以下では，$A(f;B)$ を単に A と書くことにする．命題 14.4 より，

$$f = \psi_B \circ f_A \circ \psi_B^{-1}$$

であることに注意すると以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
V_f(\lambda) &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\psi_B \circ f_A \circ \psi_B^{-1})(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f_A(\psi_B^{-1}(\boldsymbol{v})) = \lambda \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid A \cdot \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}) = \lambda \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v})\} \\
&= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \psi_B^{-1}(\boldsymbol{v}) \in V_A(\lambda)\} = \psi_B(V_A(\lambda)).
\end{aligned}$$

□

例 5. 第 13 回講義資料例 5,6 を思い出そう．ここで考えていた

$$F\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (1+x+x^2)f''(x) + 2xf'(x) + f(1).$$

は線形変換である．ここで，$\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底 $B = \{1, x, x^2\}$ に関する F の表現行列は

$$A = A(F;B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となるのであった．さらに，第 13 回講義資料例 6 での計算より，

$$V_A(1) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(2) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{K} \right\}, \qquad V_A(6) = \left\{ c\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{K} \right\}$$

となるのであった．これより，

$$\begin{aligned}
&V_F(1) = \psi_B(V_A(1)) = \{t \mid t \in \mathbb{K}\}, \\
&V_F(2) = \psi_B(V_A(2)) = \{t(1+x) \mid t \in \mathbb{K}\}, \\
&V_F(6) = \psi_B(V_A(6)) = \{t(7+5x+10x^2) \mid t \in \mathbb{K}\}
\end{aligned}$$

となる．実際これらが F の固有ベクトルになっていることは各自確かめよ．例えば，

$$F(7+5x+10x^2) = 42 + 30x + 60x^2 = 6(7+5x+10x^2)$$

である．

以下の定理は表現行列の定義から直ちにわかる．

定理 14.10

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，$B=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$f\colon V\to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1) と (2) は同値である．

(1) $A(f;B)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$

(2) 各 $j=1,\dots,n$ に対して，$\boldsymbol{v}_j$ は固有値 λ_j の f の固有ベクトル．

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，B,B' を V の基底，$f\colon V\to V$ を線形変換とすると，定理 14.3 より，

$$A(f;B')=P(B',B)^{-1}A(f;B)P(B',B). \tag{14.3}$$

となる．つまり，基底を B から B' に取り替えると f の表現行列が $A(f;B)$ から $P(B',B)^{-1}A(f;B)P(B',B)$ に変化する．ここで，本講義の前半で扱った正方行列 A を対角化するという話は，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を見つけるという話であった．よって，定理 14.10 と合わせて考えると，「線形変換 f の基底 B に関する表現行列 $A(f;B)$ を対角化する」ということは 「基底 B をどのように変換すれば f の固有ベクトルからなる基底 B' にできるかを調べる」ということに他ならないということがわかる．与えられた線形変換がどのような固有ベクトル，固有値を持っているかということは様々な分野において非常に重要な問題となる．例えば量子力学的な問題意識については，長谷川浩司著『線型代数［改訂版］』の 19 章などを参考にすること．

(14.3) に述べたように，線形変換の表現行列は基底を取り替えると $A(f;B)$ が $P(B',B)^{-1}A(f;B)P(B',B)$ に取り替わるといった形で変わるのであった．これより，$A(f;B)$ を $P(B',B)^{-1}A(f;B)P(B',B)$ に取り替えても変化しない値は基底の取り方に依らず，線形変換 f に "内在的な" 値というように考えることができる．ここで，行列式，固有多項式，トレースがそのような良い性質を持っていたことを思い出そう (線形代数 I の内容，命題 3.3，第 9 回本レポート課題解答問題 1 補足解説参照)．

A を n 次正方行列，P を n 次正則行列としたとき，以下が成立する：

- $|A|=|P^{-1}AP|$.
- $\Phi_A(t)=\Phi_{P^{-1}AP}(t)$．ここで $\Phi_X(t)$ は X の固有多項式を表す (定義 3.2)．
- $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

これより，これらの値は線形変換 f に内在的な値として定めることができる：

定義 14.11

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V$ を線形変換とする．このとき，

(1) $\det(f)\coloneqq|A(f;B)|$,
(2) $\Phi_f(t)\coloneqq\Phi_{A(f;B)}(t)$,
(3) $\mathrm{Tr}(f)\coloneqq\mathrm{Tr}(A(f;B))$,

とし，(1) を f **の行列式**，(2) を f **の固有多項式**，(1) を f **のトレース**という．ここで，B は V の基底であるが，上に述べたように V のどの基底をとってもこれらの右辺の値は変わらないことに注意する．

例 6. 例 5 の F に対して，

$$\det(F) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = 12$$
$$\Phi_F(t) = \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -3 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}\right| = (t-1)(t-2)(t-6)$$
$$\mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 9$$

である．

系 13.9 より，以下は直ちにわかる．

定理 14.12

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．このとき，以下の同値関係が成立する．

$$f \text{ は線形同型写像である} \quad \Leftrightarrow \quad \det(f) \neq 0.$$

14.4　補足：部分空間の直和

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \dots, W_n$ を V の部分空間とする．このとき，

$$\begin{aligned} W_1 + \cdots + W_n &:= \{\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n \mid \boldsymbol{w}_j \in W_j, j = 1, \dots, n\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup \cdots \cup W_n) \end{aligned}$$

とおくと，これは再び V の部分空間となる．これを $W_1, \dots, W_n$ **の和**という．これは $W_1 + \cdots + W_n$ の和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ ではなく，<u>和集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ の生成する</u>部分空間であることに注意すること (部分空間の和集合は一般に部分空間にはならないのであった．第 9 回講義資料 p.6 注意 3 参照)．ここで，$W_1, \dots, W_n$ が

$$「\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \in W_n \text{ かつ } \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}」\text{ ならば } \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たすとき，$W_1 + \cdots + W_n$ は**直和**であるといい，$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ と書く．

例 7. $\mathbb{R}^2$ において，

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\},\ W_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\},\ W_3 = \left\{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\},$$

とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in W_2 \text{ かつ } \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

ならば，$s = t = 0$ となり，$\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ となるので，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ である．さらに，

$$W_1 \oplus W_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(W_1 \cup W_2) = \mathbb{R}^2$$

である．

一般に，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間として，W_1, W_2 をその部分空間としたとき，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば，$W_1 + W_2$ は直和 $W_1 \oplus W_2$ となる．なぜなら，$\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ で $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ となるとき，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0} \in W_1$ かつ $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ なので，W_1 は部分空間であることから，

$$\boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_1 \in W_1.$$

よって，$\boldsymbol{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ なので，$\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$ であり，このとき，$\boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) - \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$ も成立するからである．

この事実を使うと，$W_2 \oplus W_3, W_3 \oplus W_1$ もすぐにわかる．一方，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和ではない．なぜなら，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in W_1,\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in W_2,\ \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \in W_3$$

とすると，それぞれは $\mathbf{0}$ ではないが，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立するためである．

直和に関しては以下の命題が成立する．

命題 14.13

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_n$ を V の有限次元部分空間とする．このとき，以下の (1)，(2)，(3) は同値である．

(1) $W_1 + \cdots + W_n$ は直和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ である．
(2) 各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，$B_j \subset W_j$ を W_j の基底とすると，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ の基底である．
(3) $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + \cdots + W_n) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} W_n$.

証明． (1)⇒(2) 各 B_j が W_j を生成することより，$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ は $W_1 + \cdots + W_n$ を生成する．よって，B が一次独立であることを示せばよい．各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，$B_j = \{\boldsymbol{w}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}\}$ と書く．ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}(i = 1, \ldots, k_j, j = 1, \ldots, n)$ が存在して，

$$\begin{aligned}&c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)}\\ &+ c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)}\\ &+ \cdots\\ &+ c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

となったと仮定する．このとき，各行の和

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

は W_j の元であることから，直和の定義より，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)} = \mathbf{0}.$$

ここで，B_j は W_j の基底であったことから，一次独立なので，上式より全ての $i = 1, \ldots, k_j$ に対して，$c_i^{(j)} = 0$．これより，B の一次独立性が示された．

(2)⇒(1) $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ かつ $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}$ であると仮定する．このとき，全ての $j = 1, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j = \mathbf{0}$ であることを示せばよい．各 $j = 1, \ldots, n$ に対し，$B_j = \{\boldsymbol{w}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}\}$ と書く．B_j は W_j の基底なので，各 $j = 1, \ldots, n$ に対して，ある $c_i^{(j)} \in \mathbb{K}(i = 1, \ldots, k_j)$ が存在して，

$$\boldsymbol{w}_j = c_1^{(j)}\boldsymbol{w}_1^{(j)} + c_2^{(j)}\boldsymbol{w}_2^{(j)} \cdots + c_{k_j}^{(j)}\boldsymbol{w}_{k_j}^{(j)}$$

と書ける．このとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n =&c_1^{(1)}\boldsymbol{w}_1^{(1)} + c_2^{(1)}\boldsymbol{w}_2^{(1)} \cdots + c_{k_1}^{(1)}\boldsymbol{w}_{k_1}^{(1)}\\ &+ c_1^{(2)}\boldsymbol{w}_1^{(2)} + c_2^{(2)}\boldsymbol{w}_2^{(2)} \cdots + c_{k_2}^{(2)}\boldsymbol{w}_{k_2}^{(2)}\\ &+ \cdots\\ &+ c_1^{(n)}\boldsymbol{w}_1^{(n)} + c_2^{(n)}\boldsymbol{w}_2^{(n)} \cdots + c_{k_n}^{(n)}\boldsymbol{w}_{k_n}^{(n)}\end{aligned}$$

となるが，いま B は $W_1+\cdots+W_n$ の基底であることから一次独立なので，すべての $i=1,\dots,k_j, j=1,\dots,n$ に対し，$c_i^{(j)}=0$．よって，このとき全ての $j=1,\dots,n$ に対して，$\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$ であることがわかる．
<u>(2)⇒(3)</u> 次元の定義が基底の元の個数であったことより明らかである．
<u>(3)⇒(2)</u> 各 B_j が W_j を生成することより，$B=B_1\cup\cdots\cup B_n$ は $W_1+\cdots+W_n$ を生成する．よって，これと仮定より，

$$\dim_{\mathbb{K}}\operatorname{span}_{\mathbb{K}}B=\dim_{\mathbb{K}}(W_1+\cdots+W_n)=\dim_{\mathbb{K}}W_1+\cdots+\dim_{\mathbb{K}}W_n.$$

ここで，B の元の個数は $\dim_{\mathbb{K}}W_1+\cdots+\dim_{\mathbb{K}}W_n$ なので，系 13.3 より，このとき B は一次独立．よって，B は $W_1+\cdots+W_n$ の基底となる． □

注意 6. 命題 14.13 の (1) と (2) の同値性は W_j らの中に無限次元のものがあってもほぼ同じ証明で成り立つ．詳細は各自考えよ．

さて，ここで固有ベクトルの一次独立性に関する以下の定理を思い出そう．

定理 5.6 (再掲)

$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k\in\mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が互いに異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

これは，ここで学んだ直和という概念を用いると，以下のように述べることができる (上は正方行列の固有ベクトルに関する主張だが，命題 14.9 より，これは線形変換の固有ベクトルに関する主張に直ちに一般化できることに注意．)．

定理 14.14

$\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ を線形変換 $f\colon V\to V$ の互いに異なる固有値とすると，$V_f(\lambda_1)+\cdots+V_f(\lambda_k)$ は直和 $V_f(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V_f(\lambda_k)$ である．

定理 14.10，命題 14.13 の (1)⇒(2)，定理 14.14 を用いると，以下が従う．

定理 14.15

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V$ を線形変換とする．このとき，以下の (1), (2), (3) は同値である．

(1) ある V の基底 B が存在して，$A(f;B)$ が対角行列になる．
(2) f の固有ベクトルからなる V の基底 B が存在する．
(3) ある f の固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}$ が存在して，$V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ となる．

14.5　補足：計量ベクトル空間

本講義の後半では主に，線形代数 I，線形代数 II の前半で勉強してきた $\mathbb{K}^n$，行列に関する内容を一般のベクトル空間 V，線形写像・変換に一般化するということを行ってきた．そこで，本講義の最後の補足として，$\mathbb{K}^n$ における内積をベクトル空間に一般化する話について簡単に述べておこう．

内積は一般のベクトル空間においては (座標が使えないので) その性質を用いて特徴づけることになる．以下の定義にある性質 (1)–(4) は命題 7.2 で示した性質 (1)–(4) にそれぞれ対応している．

定義 14.16

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V に写像

$$V \times V \to \mathbb{K},\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}$$

であって，以下の性質 (1)–(4) を満たすものが定まっているとき，V を**計量ベクトル空間**といい，上の写像を V の**内積**と呼ぶ：

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}} + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}.$$

(2) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$(c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = \overline{c}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}, \quad (\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}}.$$

(3) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = \overline{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}}$，

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}} \geq 0$，さらに，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}} = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である $(a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1})$．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは，$x \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{x} = x$ なので，上の複素共役は全て無視する．

例 8. 以下に計量ベクトル空間の例を挙げる：

(1) $\mathbb{R}^n$ は

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

によって，$\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間となる (命題 7.2 より).

(2) $\mathbb{C}^n$ は

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}} := \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる (命題 7.2 より)．この内積はエルミート内積と呼ぶのであった (定義 7.1).

(3) 複素係数 1 変数多項式のなすベクトル空間空間 $\mathbb{C}[x]$ は

$$(f(x), g(x))_{\mathbb{C}} := \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

によって，$\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．この内積は **L^2-内積**と呼ばれる (内積の定義を満たすことはチェックせよ).

(4) $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V の部分空間は V と同じ内積を用いることで再び $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間となる．例えば，2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ は上の $\mathbb{C}[x]$ と全く同じ定義の内積を用いることで $\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間となる．

以下の定義は定義 7.3 の定義をそのまま計量ベクトル空間に移したものである．

定義 14.17

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．

- $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{K}}}$ を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．内積の性質 (4) より，これは 0 以上の実数である．
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\mathbb{K}} = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という．
- B を V の基底とする．ここで，任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in B$ に対し，

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)_{\mathbb{K}} = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \text{のとき}, \\ 0 & \boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{u}_2 \text{のとき}, \end{cases}$$

  が成立するとき，B を V の**正規直交基底**という．つまり，正規直交基底とは，各元の大きさが全て 1 で互いに直交するベクトルからなる V の基底のことである．

$\mathbb{K}^n$ においては，(正規直交基底とは限らない) 基底から，正規直交基底を作る “グラム・シュミットの直交化法” と呼ばれるアルゴリズムがあった (7.2 節参照)．ここで，グラムシュミットの直交化法で正規直交基底が得られる原理を思い出すと，これは実は内積の定義にある性質 (1)–(4) さえ満たされていれば同様に行うことができるということがわかる (補足プリント :『グラム・シュミットの直交化法について』参照)．ここにその方法を再掲しておこう．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram–Schmidt orthonormalization)

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする．このとき，以下の方法で V の正規直交基底を得ることができる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_1 &\coloneqq \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{u}'_2 &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1, \\
\boldsymbol{u}'_3 &\coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{v}_3)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_2)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_2, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_k &\coloneqq \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{v}_k)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_i, \boldsymbol{u}'_i)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_i, \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{u}'_n &\coloneqq \boldsymbol{v}_n - \frac{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_1)_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{u}'_{n-1}, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{K}}}{(\boldsymbol{u}'_{n-1}, \boldsymbol{u}'_{n-1})_{\mathbb{K}}}\boldsymbol{u}'_{n-1},
\end{aligned}$$

とし，

$$\boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k, \quad k = 1, \dots, n$$

とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の正規直交基底となる．

特に，以下が言える．

定理 14.18

V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とする．このとき，V は正規直交基底を持つ．

例 9. 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間 $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ に L^2-内積を考え，これを計量ベクトル空間とみなす (例 8 (4) 参照)．$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底として標準的な $B = \{1, x, x^2\}$ をとり，これにグラム・シュミットの直交

法を適用することで正規直交基底を得てみよう．まず，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' &\coloneqq 1 \\
\boldsymbol{u}_2' &\coloneqq x - \frac{(1,x)_{\mathbb{C}}}{(1,1)_{\mathbb{C}}}\cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = x - \frac{0}{2} = x \\
\boldsymbol{u}_3' &\coloneqq x^2 - \frac{(1,x^2)_{\mathbb{C}}}{(1,1)_{\mathbb{C}}}\cdot 1 - \frac{(x,x^2)_{\mathbb{C}}}{(x,x)_{\mathbb{C}}}x = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx}x = x^2 - \frac{2/3}{2} - \frac{0}{2/3}x = \frac{1}{3}(3x^2-1).
\end{aligned}$$

する．そして，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx}}\cdot x = \sqrt{\frac{3}{2}}x \\
\boldsymbol{u}_3 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (3x^2-1)^2/9 dx}}\cdot \frac{1}{3}(3x^2-1) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)
\end{aligned}$$

で与えられる．これらは定数倍の差を除いて**ルジャンドル多項式**と呼ばれる多項式になっており，重要な多項式の一例を与えている．(より高次のものは $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ に上のグラム・シュミットの直交化法をどんどん適用することで得られる．) 興味を持った方は是非ルジャンドル多項式についても調べてみて欲しい．