線形代数 II 第 1 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の左辺の行列の積を計算し，$\boxed{ア}$〜$\boxed{ケ}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{ア} & \boxed{イ} & \boxed{ウ} \\ \boxed{エ} & \boxed{オ} & \boxed{カ} \\ \boxed{キ} & \boxed{ク} & \boxed{ケ} \end{pmatrix}.$$

問題 1 解答例. $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. □

問題 1 補足解説. 行列の積の定義を思い出しておこう．

(i, j) 成分が a_{ij} の $\ell \times m$ 行列 $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,\ell, j=1,\dots,m}$ と，(i, j) 成分が b_{ij} の $m \times n$ 行列 $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ に対し，

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\ell 1} & c_{\ell 2} & \cdots & c_{\ell n} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし，} c_{ij} := \sum_{k=1,\dots,m} a_{ik}b_{kj}$$

例えば，2×3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$3 \times 2$ 行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ に対し，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

となる．

また，行列の積については以下が成り立つことも思い出そう．

$k \times \ell$ 行列 A，$\ell \times m$ 行列 B，$m \times n$ 行列 C に対し，

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{(結合法則)}$$

これより，3 つ以上の行列の積についてはどの隣り合った 2 つから計算を始めても良いことがわかる． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2

以下の行列式の値$\boxed{ア}$〜$\boxed{ウ}$を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

$$(1)\quad \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right| = \boxed{ア}$$

$$(2)\quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \boxed{イ}$$

$$(3)\quad \left|\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| = \boxed{ウ}$$

問題 2 解答例.

(1) -7

(2) -6

(3) 52 □

問題 2 補足解説. まず行列式の定義を思い出しておこう[*1]．

行列式の明示式による定義

n を正の整数とする．$n \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

に対して，A の行列式 $|A|$ (あるいは $\det(A)$ と書かれる) は以下で定義される．

$$|A| \coloneqq \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで，S_n は n 文字の置換全体の集合で $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$．ただし，$k$ は σ に対応するあみだくじを書いたときの横棒の本数の数 (σ に対応するあみだくじは無数にあるが，横棒の本数の偶奇は対応するあみだくじの取り方にはよらない)．

行列式を計算する際には行列式の余因子展開が便利であった．

余因子展開

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対して，以下が成立する．
任意の $j = 1, \dots, n$ に対し，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{j1}\widetilde{a_{j1}} + a_{j2}\widetilde{a_{j2}} + \cdots + a_{jn}\widetilde{a_{jn}} \quad &(\text{第 } j \text{ 行に関する余因子展開}) \\ &= a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}} \quad &(\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}) \end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{a_{ij}} \coloneqq (-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$，ただし，$\check{A}_{ij}$ は A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (n-1)$ 行列である．$\widetilde{a_{ij}}$ を (i,j)-**余因子**と呼ぶ．

また，以下の行列式の性質も計算においては便利であった．なお，これらは問題 5 の補足解説に述べる行列式の重要 3 性質から導かれる (証明を考えてみよ)．

[*1] 行列式には同値な定義が複数あるので人によってはこれを「行列式の性質」として学んだ人もいるかもしれないが，ここではこれを定義とすることにする．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では列ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}$ が n 次列ベクトル).

(i) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$. つまり，0 のみの列があれば行列式は 0.

(ii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{j}{\boldsymbol{b}},\dots,\overset{j'}{\boldsymbol{b}},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$. ただし，$j\neq j'$. つまり，同じ列があれば行列式は 0.

(iii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{j}{\boldsymbol{a}_j},\dots,\overset{j'}{\boldsymbol{a}_{j'}+c\boldsymbol{a}_j},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_{j'},\dots,\boldsymbol{a}_n)|$. ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い). つまり，ある列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない.

また，さらに行列式の転置不変性から (問題 4 補足解説参照)，行列式は行に関しても重要 3 性質を満たし，上の性質を行に置き換えたバージョンも成立する．

上の (i)–(iii) の行のバージョン

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では行ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{d}$ が n 次行ベクトル).

(i)′ $\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$\boldsymbol{0}$ は n 次行 0 ベクトル．つまり，0 のみの行があれば行列式は 0.

(ii)′ $\left|\begin{array}{c}\\ \\ j>\\ \\ j'>\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$j\neq j'$. つまり，同じ行があれば行列式は 0.

(iii)′ $\left|\begin{array}{c}\\ \\ j>\\ \\ j'>\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}+c\boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|$. ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い).

つまり，ある行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない.

また，2×2 行列，3×3 行列の行列式は公式として覚えておくと良いだろう．

2×2 行列，3×3 行列の行列式の公式

- $\left|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right|=ad-bc.$
- $\left|\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$

(サラスの方法)

さて，問題 2 の計算は以下のように行える．

(1)

$$\left|\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right|=2\cdot(-2)-3\cdot 1=-7.$$

(2)

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right|=1\cdot 2\cdot 0+2\cdot 3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot(-1)-2\cdot(-1)\cdot 0-(-1)\cdot 2\cdot(-1)=-6.$$

(3)

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 2 行に関して余因子展開)}$$

$$= 2 \cdot ((-3) \cdot 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 0 - (-3) \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \cdot 2)$$

$$= 52.$$

なお，3 次以上の (3) のような行列式については，上に述べた行列式の性質を用いて行列を例えば以下のように簡単にしてから計算するのが良い．

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 3 列の 3 倍, 1 倍をそれぞれ第 1 列, 第 4 列に加えた)}$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 2 行に関して余因子展開)}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 1 行に関して余因子展開)}$$

$$= -2 \cdot (5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2)$$

$$= 52.$$

□

問題 3

以下の $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ス}}$ に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} & \boxed{\text{キ}} \\ \boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケ}} & \boxed{\text{コ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}$$

問題 3 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

□

問題 3 補足解説. 逆行列については 2×2 の時は公式を覚えておいた方が良い．

2×2 行列の逆行列の一般形

行列式 $ad - bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

これ以上のサイズの場合は余因子行列を用いる公式があるが，実際の計算においては計算量が多く，計算する

うえではあまり有用とは言えない (理論としては重要である)．$n \times n$ の行列 A の逆行列については，以下のように求めるのが良いであろう．

(Step 1) $\widetilde{A} = (A \mid I_n)$ という $n \times 2n$ 行列を用意する．(I_n は n 次単位行列．)
(Step 2) $\widetilde{A}$ を行基本変形を用いて簡約化する．
(Step 3) (Step 2) の結果が，$(I_n \mid B)$ という形になれば，$A^{-1} = B$．このような形にならなかった場合は A は正則ではない．

問題 3 の計算は以下のように行える．

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行基本変形により簡約化する．

$$\tilde{A} \xrightarrow[\text{第 2 行，第 3 行に加える}]{\text{第 1 行の } (-1) \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行，第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の } (-1) \text{ 倍，} (-2) \text{ 倍をそれぞれ}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行の } (-1) \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

これより，求める行列は $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$． □

問題 4

A を実数を成分に持つ n 次正方行列とする．以下の (1), (2), (3) の条件のうち「A に逆行列が存在する」ことと同値な条件でないものが存在すればそれらを全て選択せよ．(1), (2), (3) が全て「A に逆行列が存在する」ことと同値な条件であると考えるならば (4) を選択せよ．

(1) $|A| \neq 0$.
(2) A の転置行列 ${}^t A$ が逆行列を持つ．
(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．
(4) (1), (2), (3) は全て「A に逆行列が存在する」ことと同値な条件である．

問題 4 解答例． (4) □

問題 4 補足解説． 実数あるいは複素数を成分に持つ n 次正方行列 A に対して，以下の 4 つが全て同値であったことを思い出しておこう：

(1) A は正則である (=A に逆行列が存在する)．
(2) $|A| \neq 0$.
(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．
(4) $\mathrm{rank}(A) = n$.

特に，A が逆行列を持つかどうか調べるためには行列式 $|A|$ を計算して 0 になるかどうかを調べれば良いのであった．また，行列式は以下の転置不変性を持つ．

行列の転置と行列式の転置不変性

n を正の整数とする．$m \times n$ 行列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (x_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$$

に対して，X の**転置** ${}^tX$ を，(i,j) 成分を x_{ji} (j と i の順番に注意) とする $n \times m$ 行列

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (x'_{ij})_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m}, \quad x'_{ij} := x_{ji}$$

として定義する．このとき，任意の n 次正方行列 A に対して，

$$|{}^tA| = |A|.$$

これより，n 次正方行列 A に対して，

$$|A| \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |{}^tA| \neq 0$$

であり，上で述べた同値条件と合わせると，

$$A \text{ の転置行列}{}^tA \text{ が逆行列を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad |{}^tA| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ が逆行列を持つ}$$

となることがわかる． □

問題 5

3 次正方行列 A の行列式の値が 1 であるとき，$2A$ の行列式の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．$\boxed{\text{ア}}$ に入る整数を半角数字で入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$ に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．

問題 5 解答例． 8 □

問題 5 補足解説． 本問は行列の多重線型性を用いて解くことができる．ここで，多重線型性を含む，行列式を特徴づける 3 性質について思い出しておこう．

行列式の重要 3 性質

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下の (ii), (iii) では列ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{a}_j$ が n 次列ベクトル).

(i) $|I_n|=1$．ただし，I_n は n 次単位行列．(規格化条件)

(ii) 任意の $c,c'\in\mathbb{K}$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\overset{\overset{j}{\vee}}{c\boldsymbol{a}_j+c'\boldsymbol{a}'_j},\cdots,\boldsymbol{a}_n)|=c|(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j},\cdots,\boldsymbol{a}_n)|+c'|(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}'_j},\cdots,\boldsymbol{a}_n)|.$$

(多重線形性)

(iii) 各 $1\le j<j'\le n$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j},\ldots,\overset{\overset{j'}{\vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}},\ldots,\boldsymbol{a}_n)|=-|(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\overset{\overset{j}{\vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}},\ldots,\overset{\overset{j'}{\vee}}{\boldsymbol{a}_j},\ldots,\boldsymbol{a}_n)|$$

(交代性)

さらに，これと問題 4 補足解説に述べた行列式の転置不変性から，行に関しての多重線形性，交代性も成立することがわかる．

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下では行ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{b}_j$ が n 次行ベクトル).

(ii)$'$ 任意の $c,c'\in\mathbb{K}$ に対し，

$$\left|\begin{array}{c}\\ \\ {\scriptstyle j>}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ c\boldsymbol{b}_j+c'\boldsymbol{b}'_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=c\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|+c'\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}'_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|.$$

(多重線形性)

(iii)$'$ 各 $1\le j<j'\le n$ に対し，

$$\left|\begin{array}{c}\\ \\ {\scriptstyle j>}\\ \\ {\scriptstyle j'>}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=-\left|\begin{array}{c}\\ \\ {\scriptstyle j>}\\ \\ {\scriptstyle j'>}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|.$$

(交代性)

問題 5 の計算は以下のように行える．
A を $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$(ただし，各 $\boldsymbol{a}_k$ は 3 次列ベクトル) と表示すると，多重線型性より，

$$|2A|=|(2\boldsymbol{a}_1,2\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_3)|=2^3\,|(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)|=8|A|=8.$$

□

問題 6

以下の行列のランク (階数) を求め，半角数字で入力せよ．

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 6 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 5 & -8\\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4\\ 1 & -1 & 0 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

問題 6 解答例. 3. □

問題 6 補足解説. 与えられた行列を掃き出し法により簡約化して得られる簡約階段行列の段の数が**ランク (階数, rank)** である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

を掃き出し法により簡約化する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,4 行に加える}]{\text{第 1 行の }(-1)\text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 3,4 行に加える}]{\text{第 2 行の }(-2)\text{ 倍,1 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を 1/10 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,4 行に加える}]{\text{第 3 行の 1 倍,7 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，求める階数は 3. □

問題 7

次の v, w, x, y, z に関する連立一次方程式の解の自由度 (一般の解をベクトル表示した際に必要となる最小のパラメータの数) を求め，半角数字で入力せよ.

$$\begin{cases} v + w + 3x + 3z = 0 \\ 6v + 2x + 5y - 2z = 0 \\ 7v - w + x + 6y + 8z = 0 \\ -2w - 4x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

問題 7 解答例. 2. □

問題 7 補足解説. 一般に係数行列が $m \times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(ただし，$b_1, \ldots, b_m$ は定数) を解くためには，拡大係数行列

$$\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b}) \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すればよかった．ここで，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のときこの連立一次方程式は解を持ち，そうでないとき (つまり $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき) この連立一次方程式は解無しとなるのであった.

本問の連立一次方程式は,

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 6 & 0 & 2 & 5 & -2\\ 7 & -1 & 1 & 6 & 8\\ 0 & -2 & -4 & 1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ w\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

と表されるので,

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 6 & 0 & 2 & 5 & -2 & 0\\ 7 & -1 & 1 & 6 & 8 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 1 & 7 & 0\end{array}\right)$$

を簡約化すればよい．この場合は最後の列の成分が全て 0 で，行基本変形の過程においてこの列の成分は常に 0 のままなので，無視して計算しても良い．

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 6 & 0 & 2 & 5 & -2\\ 7 & -1 & 1 & 6 & 8\\ 0 & -2 & -4 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

を行基本変形により簡約化する．

$$A \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3 行に加える}]{\text{第 1 行の}-6\text{ 倍,}-7\text{ 倍を}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & -6 & -16 & 5 & -20\\ 0 & -8 & -20 & 6 & -13\\ 0 & -2 & -4 & 1 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 4 行を}-1/2\text{ 倍する}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & -6 & -16 & 5 & -20\\ 0 & -8 & -20 & 6 & -13\\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -7/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,3 行に加える}]{\text{第 4 行の}-1\text{ 倍,6 倍,8 倍を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1/2 & 13/2\\ 0 & 0 & -4 & 2 & -41\\ 0 & 0 & -4 & 2 & -41\\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -7/2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を}-1/4\text{ 倍する}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1/2 & 13/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 41/4\\ 0 & 0 & -4 & 2 & -41\\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & -7/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,3,4 行に加える}]{\text{第 2 行の}-1\text{ 倍,4 倍,}-2\text{ 倍を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -15/4\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 41/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -24\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行の入れ替え}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -15/4\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -24\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 41/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

この結果から，与えられた連立一次方程式は最後の行列を係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases}v + y - \frac{15}{4}z = 0\\ w + \frac{1}{2}y - 24z = 0\\ x - \frac{1}{2}y + \frac{41}{4}z = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}v = -y + \frac{15}{4}z\\ w = -\frac{1}{2}y + 24z\\ x = \frac{1}{2}y - \frac{41}{4}z\end{cases}$$

と同値であるということがわかる．よって，$y = s, z = t$ とおくと，この連立一次方程式の一般の解は

$$\begin{pmatrix}v\\ w\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-1\\ -1/2\\ 1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}15/4\\ 24\\ -41/4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad s, t \text{ は任意の定数}$$

とベクトル表示される．これより，解の自由度は 2 である．

一般に係数行列が $m \times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

について，拡大係数行列を $\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ と書くと，

- $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき，解無し.
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき，自由度 $n - \operatorname{rank} A$ で解を持つ.

ここで，常に $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} \widetilde{A}$ であることに注意.

$\square$