# 線形代数 II 第 2 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

**問題 1**

行列

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 6 & -4 \\ -80 & 21 & -13 \\ 40 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

の固有値 3 に対応する固有ベクトルの 1 つは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{ア} \\ \boxed{イ} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．(回答例：-10,11 (マイナスを表す-は半角のハイフン))

**問題 1 解答例.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. □

**問題 1 補足解説.** $A$ の固有値 3 に対する固有ベクトルは $x_1, x_2, x_3$ に関する連立一次方程式

$$(3I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -6 & 4 \\ 80 & -18 & 13 \\ -40 & 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ として与えられるのであった．上の連立一次方程式の係数行列 $3I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c \text{ は任意定数}$$

となる．よって，$A$ の固有値 3 に対応する固有ベクトルの 1 つとして，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が取れる． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

一般に $n$ 次正方行列 $A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルを求めるためには，$x_1, \ldots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \left(\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

の $\mathbf{0}$ でない解を求めれば良いのであった．固有値 $\lambda$ の固有ベクトルを求める問題は，得られたベクトル $\boldsymbol{x}$ が $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たしているかどうかを確認することで答えの再確認が可能である．時間があるときには検算をすることで計算ミスを減らすようにしてほしい．

なお，上の計算結果より，$A$ の固有値 3 に対する固有空間は

$$V_A(3) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 \mid A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}\} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{C} \right\}$$

であると言える．

ちなみに，問題の行列 $A$ は固有値として $1, 2, 3$ を持ち，ある 3 次正則行列 $P$ を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角化することができる (対角成分の並ぶ順番は $P$ の取り方によって変わる)．講義内で扱った方法で，固有値 $1, 2, 3$ を求める所から $P$ を求める所まで自力でできるか試してみてほしい．固有値の求め方については問題 3 補足解説も参照のこと． □

**問題 2**

行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 20 & 11 & -10 & -14 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 20 & 12 & -10 & -15 \end{pmatrix}$$

の固有値 2 に対応する固有ベクトルの 1 つは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．(回答例：-10,11,0 (マイナスを表す-は半角のハイフン))

**問題 2 解答例.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

**問題 2 補足解説.** $A$ の固有値 2 に対する固有ベクトルは $x_1, x_2, x_3, x_4$ に関する連立一次方程式

$$(2I_4 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -20 & -9 & 10 & 14 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ -20 & -12 & 10 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ として与えられるのであった．上の連立一次方程式の係数行列 $2I_4 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c \text{ は任意定数}$$

となる．よって，$A$ の固有値 $2$ に対応する固有ベクトルの $1$ つとして，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が取れる． □

上の計算結果より，$A$ の固有値 $2$ に対する固有空間は

$$V_A(3) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^4 \mid A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}\} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{C} \right\}$$

であると言える．

ちなみに，問題の行列 $A$ は固有値として $-3, -1, 1, 2$ を持ち，ある $3$ 次正則行列 $P$ を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化することができる (対角成分の並ぶ順番は $P$ の取り方によって変わる)．講義内で扱った方法で，固有値 $-3, -1, 1, 2$ を求める所から $P$ を求める所まで自力でできるか試してみてほしい． □

**問題 3**

行列

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

の固有値として現れる値を**全て求め**，半角数字でコンマで区切って入力せよ．(入力の順は自由ですが，小さい順に並べてもらえると採点を行う上で助かります．回答例：-10,11 (マイナスを表す-は半角のハイフン))

**問題 3 解答例．** $3, 5$． □

**問題 3 補足解説.** $A$ の固有多項式は,

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) = |tI_2 - A| &= \left|\begin{pmatrix} t+6 & 9 \\ -11 & t-14 \end{pmatrix}\right| \\ &= (t+6)(t-14) - 9\cdot(-11) \\ &= t^2 - 8t + 15 \\ &= (t-3)(t-5)\end{aligned}$$

となる．$A$ の固有値は固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解であるので，$3, 5$ で全てである． □

一般に $n$ 次正方行列 $A$ の固有値を求めるには，固有多項式 $\Phi_A(t) = |tI_n - A|$ を計算し，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解けば良いのであった．ちなみに，$A$ が 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のときは,

$$\Phi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + |A|$$

となる．ここで，$\mathrm{Tr}(A)$ は $A$ の対角成分の和 $a + d$ を表す．(一般に $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ に対し，その対角成分の和 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を $A$ の**トレース**と言い，$\mathrm{Tr}(A)$ と書く．)

本問では $A$ の固有値を求めたので，ぜひ対応する固有ベクトルを求め，対角化を行う所まで練習してもらいたい． □

**問題 4**

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値として現れる値を**全て求め**，半角数字でコンマで区切って入力せよ．(入力の順は自由ですが，小さい順に並べてもらえると採点を行う上で助かります．)

**問題 4 解答例.** $-1, 1$. □

**問題 4 補足解説.** $A$ の固有多項式は,

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) = |tI_4 - A| &= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t^2-1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| \qquad (\text{第 1 行に第 4 行の } t \text{ 倍を加えた}) \\ &= (-1)^{4+1}\cdot(-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2-1 \\ t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}\right| \qquad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\ &= (-1)^{1+3}(t^2-1)\left|\begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\right| \qquad (\text{第 1 行に関して余因子展開}) \\ &= (t^2-1)^2 = (t+1)^2(t-1)^2\end{aligned}$$

となる．$A$ の固有値は固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解であるので，$-1, 1$ で全てである． □

本問でもそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めてもらいたい．本問のようなきれいな行列だと，行列の計算に十分慣れている方は固有ベクトルが固有値よりも先にわかるという方もおられるだろう．実際に固有ベクトルを求めてみると非常にきれいな形をしていることがわかる． □

**問題 5**

以下の文章のうち正しいものを**全て選択**せよ.

(1) 正方行列 $A$ が $1, 2, 3$ を固有値に持つとき，$A^2$ は必ず $1, 4, 9$ を固有値として持つ.

(2) 3 次正方行列 $A$ が 1 を固有値に持ち，3 次正方行列 $B$ が 2 を固有値に持つとき，$A+B$ は必ず 3 を固有値として持つ.

(3) 正方行列 $A$ の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ が $t = \alpha$ を解に持ったとしても，$\alpha$ が $A$ の固有値ではないことがあるので， 実際に $\alpha$ が $A$ の固有値であるかどうかは対応する固有ベクトルが存在するかどうか確かめるまでわからない.

(4) 正方行列 $A$ が 0 を固有値に持つとき，$A$ は正則ではない.

**問題 5 解答例.** $(1), (4)$. □

**問題 5 補足解説.** それぞれ以下のように考えれば良い.

(1) $A$ が固有値 $\lambda$ を持つということは固有値 $\lambda$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するということである．このとき，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

となるので，この $\boldsymbol{v}$ に対して，

$$A^2\boldsymbol{v} = A(A\boldsymbol{v}) = A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$$

となる．よって，$\boldsymbol{v}$ は $A^2$ の固有値 $\lambda^2$ に対する固有ベクトルとなり，$A^2$ は固有値 $\lambda^2$ を持つと言える．これより，正方行列 $A$ が $1, 2, 3$ を固有値に持つとき，$A^2$ は必ず $1, 4, 9$ を固有値として持つと言える．ちなみに，一般に $n$ 次正方行列 $A$ が固有値 $\lambda$，$n$ 次正方行列 $B$ が固有値 $\mu$ を持つとき $AB$ が固有値 $\lambda\mu$ を持つ**とは限らない**ので注意をする必要がある. □

(2) 例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$A$ の固有多項式は $t^2(t-1)$ なので，$A$ は 1 を固有値に持ち，$B$ の固有多項式は $t^2(t-2)$ なので，$B$ は 2 を固有値に持つ．一方，

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は $t(t-1)(t-2)$ なので，$A+B$ の固有値は $0, 1, 2$ であり，3 は $A+B$ の固有値ではない．よって，(2) の主張は一般には成り立たないことがわかる. □

(3)

$$A \text{ が固有値 } \alpha \text{ を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_A(\alpha) = 0$$

であったので，$A$ の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ が $t = \alpha$ を解に持つのであれば，$\alpha$ は必ず $A$ の固有値である. □

(4) 正方行列 $A$ が 0 を固有値に持つということは固有値 0 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するということである．このとき，

$$A\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

であるので，$\boldsymbol{v}$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ でない解である．$A$ が正則であれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかけることで，この連立一次方程式は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ しか解を持たないことが導かれるので，このとき $A$ は正則ではない．(第 1 回レポート課題解答例問題 4 補足解説も参照のこと．) □