線形代数 II 第 3 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 16 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能である場合，対角化の結果得られる行列の対角成分を<u>**重複度込みで**</u>半角数字でコンマで区切って入力せよ．すなわち，解答の方法は以下の通りである．

- 対角化不可能であると考えた場合 $\cdots$「対角化不可能」と入力．
- 対角化可能で，対角化の結果が $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ であると判定した場合 $\cdots$「a, b, c」と入力．

  例えば，対角化の結果が

  $$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  であると考えた場合，「-10,2,2」と入力する (マイナスを表す-は半角のハイフン)．この場合，2 **を 2 つ入力する必要がある**ことに注意すること．

問題 1 解答例． $-1, 0, 1.$ □

問題 1 補足解説． n 次正方行列 A の対角化可能性の判定は以下のように行えば良かった．

n 次正方行列 A の対角化可能性の判定

(1) A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とする．

(1′) 手順 (1) の時点で A が相異なる n 個の固有値を持つことがわかった場合 (すなわち全ての固有値の重複度が 1 である場合)，A は対角化可能である．

(2) 重複度が 2 以上の全ての固有値 λ_j について，$n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A)$ を計算し，一つでも m_j より小さいものがあれば A は対角化不可能である．逆に全ての固有値 λ_j に対して $n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A) = m_j$ が成立する場合，A は対角化可能である．

ここで，上の手順において現れる $n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A)$ という値は，A の固有値 λ_j の固有ベクトルを解に持つ連立一次方程式

$$(\lambda_j I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解の自由度に他ならない．すなわち，(2) では「固有値 λ_j の固有ベクトルを解に持つ連立一次方程式の解の自由度」と「固有値 λ_j の重複度」を比較しており，これらが全て一致するときに対角化可能であるということである．(実は一般に「自由度」$\leq$「重複度」となる．) また，上の設定の場合，対角化可能であれば，対角化

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

の結果は (対角成分の並び方の違いを無視すると) 必ず

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \text{が } m_1 \text{個}, \lambda_2 \text{が } m_2 \text{個}, \ldots, \lambda_k \text{が } m_k \text{個})$$

となるということも合わせて思い出そう．特に，対角化の結果を知るだけであれば，A を対角化する行列 P は求める必要がない．

それでは上の手順に従って問題 1 を解いてみよう；

A の固有多項式は,

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t+4 & -1 & 1 \\ 4 & t-1 & 2 \\ -16 & 4 & t-3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 1 \\ 4 & t+1 & 2 \\ -16 & t+1 & t-3 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列に第 3 列を加えた}) \\ &= \left| \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 1 \\ 4 & t+1 & 2 \\ -20 & 0 & t-5 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 3 行に第 2 行の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\ &= (t+1) \left| \begin{pmatrix} t+4 & 1 \\ -20 & t-5 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\ &= (t+1)(t^2 - t) = (t+1)t(t-1) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 1), 0(重複度 1), 1(重複度 1) である．よって，A は相異なる 3 個の固有値を持つので対角化可能であり，その対角化の結果の 1 つは

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である． □

問題 2

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能である場合，対角化の結果得られる行列の対角成分を**重複度込みで**半角数字でコンマで区切って入力せよ．なお，解答の方法については問題 1 と同様である．

問題 2 解答例. 0,0,3 □

問題 2 補足解説. 問題 1 補足解説に記載した手順に従って，対角化可能性の判定を行う；

A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ -t & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 行に第 1 行を加えた}) \\
&= t\left|\begin{pmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\
&= t(t^2-3t) = t^2(t-3)
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 0(重複度 2), 3(重複度 1) である．

ここで,

$$0I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$3 - \mathrm{rank}(0I_3 - A) = 3 - 1 = 2 (= \text{固有値 } 0 \text{ の重複度})$$

となる．A の重複度 2 以上の固有値は 0 のみなので，これより A が対角化可能であることがわかり，その対角化の結果の 1 つは

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である． □

問題 3

行列

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -9 & 5 \\ 32 & -20 & 11 \\ 13 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能である場合，対角化の結果得られる行列の対角成分を**重複度込みで**半角数字でコンマで区切って入力せよ．なお，解答の方法については問題 1 と同様である．

問題 3 解答例. 対角化不可能. □

問題 3 補足解説. 問題 1 補足解説に記載した手順に従って，対角化可能性の判定を行う；

A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-15 & 9 & -5 \\ -32 & t+20 & -11 \\ -13 & 9 & t-5 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} t-2 & 0 & -t \\ -32 & t+20 & -11 \\ -13 & 9 & t-5 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 行に第 3 行の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\
&= (t+20)\left|\begin{pmatrix} t-2 & -t \\ -13 & t-5 \end{pmatrix}\right| - 9\left|\begin{pmatrix} t-2 & -t \\ -32 & -11 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\
&= (t+20)(t^2-20t+10) - 9(-43t+22) \\
&= t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -2(重複度 1), 1(重複度 2) である．

ここで,

$$1I_3 - A = \begin{pmatrix} -14 & 9 & -5 \\ -32 & 21 & -11 \\ -13 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$3 - \mathrm{rank}(1I_3 - A) = 3 - 2 = 1 < 2(= \text{固有値 1 の重複度})$$

となる．よって，A は対角化不可能である． □

問題 4

行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能である場合，対角化の結果得られる行列の対角成分を**重複度込みで**半角数字でコンマで区切って入力せよ．なお，解答の方法については問題 1 と同様である．

問題 4 解答例. 対角化不可能. □

問題 4 補足解説. 問題 1 補足解説に記載した手順に従って，対角化可能性の判定を行う；

A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t+1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & t & -1 & -1 \\ -1 & 1 & t-2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & t-2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に第 3 列を加えた}) \\
&= \left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & t-1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に第 2 行の} -1 \text{倍を加えた}) \\
&= (t-1)\left|\begin{pmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\
&= (t-1)\left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ -2 & -t+1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に第 3 列の} -1 \text{倍を加えた}) \\
&= (t-1)\left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ 1 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に第 2 行を加えた}) \\
&= (t-1)^2\left|\begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 列に関して余因子展開}) \\
&= t^2(t-1)^2
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 0(重複度 2), 1(重複度 2) である．

ここで,

$$0I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$4 - \mathrm{rank}(0I_4 - A) = 4 - 3 = 1 < 2 (= \text{固有値 } 0 \text{ の重複度})$$

となる．よって，A は対角化不可能である． □

ちなみに,

$$1I_4 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$4 - \mathrm{rank}(1I_4 - A) = 4 - 2 = 2 (= \text{固有値 } 1 \text{ の重複度})$$

である．しかし，対角化可能であるための必要十分条件は，重複度が 2 以上の**全ての固有値** λ_j について $n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A)$ と固有値 λ_j の重複度が一致することなので，上の一致だけでは対角化可能とは言えないということに注意しよう． □

問題 5

以下の文章のうち正しいものを**全て選択**せよ．

(1) 3 次正方行列 A の固有多項式が $\Phi_A(t) = t^3 - 1$ であるとき，A は (複素数成分の行列を用いて) 対角化可能である．

(2) 対角化可能な 3 次正方行列 A で固有多項式が $\Phi_A(t) = (t-1)^3$ であるものは単位行列 I_3 のみである．

(3) 3 次正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である．($|A|$ は A の行列式)

問題 5 解答例. (1), (2). □

問題 5 補足解説. それぞれ以下のように考えれば良い．

(1) $t^3 - 1 = (t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)$ (ただし，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$) となるため，3 次正方行列 A は相異なる 3 個の固有値 $1, \omega, \omega^2$ を持つ．よって，A は対角化可能である． □

実数 (あるいは整数) の範囲で因数分解できないからといって，対角化できないということにはならないので注意しよう．ただし，A が実行列であるとすると，実行列 P による対角化はできない．対角化されるならば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

となる P が存在するということになるが，P も A も実行列であれば $P^{-1}AP$ の成分は全て実数なので右辺の行列にはなり得ないからである．

(2) 固有多項式が $\Phi_A(t) = (t-1)^3$ であるとき，A の固有値は 1 (重複度 3) なので，A が対角化可能であるとすると，ある 3 次正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

とできる．しかしこのとき，両辺に左から P，右から P^{-1} をかけると，

$$A = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

となるので，結局 A は単位行列であったということがわかる． □

(3) 最も極端な例としては，ゼロ行列

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は対角成分が全て 0 の対角行列なので，すでに対角化されていると言える．つまり，O_3 は対角化可能な行列であるが，$|O_3| = 0$ である．一般に，正方行列 A が 0 を固有値に持つなら，固有値 0 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するので，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{v}$ をもつ．よって，このとき A は正則ではない．(第 1 回レポート課題解答例問題 4 補足解説も参照のこと．)

対角化可能性は行列式で判定するものではないので注意しておこう． □