

# 線形代数 II 第 4 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)\*

## 問題 1

行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

のなかに対角化可能なものが**丁度 1 つだけ**存在する．その対角化可能な行列を  $X$  とするとき、 $X^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) を対角化を用いることで求めよ．ただし、以下の解答欄にあわせて、

- (1) 対角化可能な  $X$  は  $A, B, C$  のうちどれか、
- (2)  $X$  を対角化する 3 次正則行列  $P$ 、
- (3) (2) の  $P$  による  $X$  の対角化の結果  $P^{-1}XP$ 、
- (4)  $X^n$  の結果、

を必ず記載すること．

※基本的には答えを見て採点を行うが、(2)、(3)、(4) についてはどのように計算したかわかる程度の計算の過程を記載した紙やノートも添付すること ((1) は答えのみでよい)．(2)、(3)、(4) については計算の過程が記載されている部分が全く無い場合、**答えが合っても 0 点とする**．なお、書ききれぬ場合には別用紙にしなくても以下の解答スペースの余白部分に計算の過程を記載すれば良い．

**問題 1 解答例**．対角化可能な行列は<sup>(1)</sup>  $X = C$  である． $C$  の対角化可能性は以下のようにわかる．

$C$  の固有多項式は、

$$\begin{aligned} \Phi_C(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 1 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} t-3 & 1 & 1 \\ -t+3 & t-2 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列の } -1 \text{ 倍を加えた}) \\ &= \left| \begin{pmatrix} t-3 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 2 \\ 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 2 行に第 1 行を加えた}) \\ &= (t-3) \left| \begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 1 & t-2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\ &= (t-3)(t^2 - 3t) = t(t-3)^2 \end{aligned}$$

となるので、 $C$  の固有値は 0(重複度 1)、3(重複度 2) である．

$C$  の固有値 3 に対する固有ベクトルは  $x_1, x_2, x_3$  に関する連立一次方程式

$$(3I_3 - C) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\* e-mail : hoya@shibaura-it.ac.jp

の  $\mathbf{0}$  でない解  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  として与えられる. 係数行列  $3I_3 - C$  は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, この連立一次方程式の一般の解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \text{ は任意定数}$$

となる. 特に, 連立一次方程式  $(3I_3 - C)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解の自由度は 2 で, 固有値 3 の重複度に等しい. いま,  $C$  の重複度 2 以上の固有値は 3 のみなので, これより,  $C$  が対角化可能であることがわかる. また, 固有値 3 に対する固有ベクトルの組で一次独立なもの 1 つとして,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる.

次に,  $C$  の固有値 0 に対する固有ベクトルは  $x_1, x_2, x_3$  に関する連立一次方程式

$$(0I_3 - C) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の  $\mathbf{0}$  でない解  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  として与えられる. 係数行列  $-C$  は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, この連立一次方程式の一般の解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \text{ は任意定数}$$

となる. これより, 固有値 0 に対する固有ベクトルの 1 つとして,

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる. 以上より,

$$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,  $P$  は正則で,

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これより, 各  $n \in \mathbb{Z}$  に対し,

$$P^{-1}C^n P = (P^{-1}CP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $P^{-1}$  を計算すると、

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} C^n &= P(P^{-1}C^n P)P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & -3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**問題 1 補足解説.**  $n$  次正方行列  $A$  の対角化可能性の判定は以下のように行えば良かった。(第 3 回レポート課題解答問題 1 補足解説も参照.)

**$n$  次正方行列  $A$  の対角化可能性の判定**

- (1)  $A$  の固有方程式  $\Phi_A(t) = 0$  の解を重複度込みで求める。この解を  $\lambda_1$ (重複度  $m_1$ ), ...,  $\lambda_k$ (重複度  $m_k$ ) とする。
- (1') 手順 (1) の時点で  $A$  が相異なる  $n$  個の固有値を持つことがわかった場合 (すなわち全ての固有値の重複度が 1 である場合),  $A$  は対角化可能である。
- (2) 重複度が 2 以上の 全ての固有値  $\lambda_j$  について,  $n - \text{rank}(\lambda_j I_n - A)$  を計算し, 一つでも  $m_j$  より小さいものがあれば  $A$  は対角化不可能である。逆に全ての固有値  $\lambda_j$  に対して  $n - \text{rank}(\lambda_j I_n - A) = m_j$  が成立する場合,  $A$  は対角化可能である。

上の設定の場合, 対角化可能であれば, 対角化の結果は (対角成分の並び方の違いを無視すると) 必ず

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \text{ が } m_1 \text{ 個}, \lambda_2 \text{ が } m_2 \text{ 個}, \dots, \lambda_k \text{ が } m_k \text{ 個})$$

という形になる。特に、対角化可能性の判定、および対角化可能な場合の対角化の結果を知るだけであれば、 $A$  を対角化する行列  $P$  は求める必要がない。しかし、本問のように正方行列  $A$  の  $n$  乗を対角化を用いて計算する際には、 $A$  を対角化する  $P$  とその逆行列  $P^{-1}$  の具体的な計算が必要となる。

ここで、一般に対角化可能な  $n$  次正方行列  $A$  を対角化する正則行列  $P$  を求める手順も復習しておこう。

対角化可能な  $n$  次正方行列  $A$  を対角化する正則行列  $P$  を求める手順

- (1)  $A$  の固有方程式  $\Phi_A(t) = 0$  の解を重複度込みで求める. この解を  $\lambda_1$  (重複度  $m_1$ ),  $\dots$ ,  $\lambda_k$  (重複度  $m_k$ ) とする (ただし,  $i \neq j$  のとき  $\lambda_i \neq \lambda_j$  とする).
- (2) 各  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) に対して, 連立一次方程式  $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解く. このとき,  $A$  が対角化可能であれば解の自由度は  $m_i$  となるので, この解の全体はある  $\mathbf{p}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{p}_{m_i}^{(i)} \in \mathbb{C}^n$  を用いて,

$$\{c_1 \mathbf{p}_1^{(i)} + \dots + c_{m_i} \mathbf{p}_{m_i}^{(i)} \mid c_1, \dots, c_{m_i} \in \mathbb{C}\}$$

と書ける. こうして得られる  $\mathbf{p}_k^{(i)}$  らを並べて  $n$  次正方行列

$$P = \underbrace{(\mathbf{p}_1^{(1)} \ \dots \ \mathbf{p}_{m_1}^{(1)})}_{m_1 \text{個}} \underbrace{(\mathbf{p}_1^{(2)} \ \dots \ \mathbf{p}_{m_2}^{(2)})}_{m_2 \text{個}} \dots \underbrace{(\mathbf{p}_1^{(k)} \ \dots \ \mathbf{p}_{m_k}^{(k)})}_{m_k \text{個}}$$

を作ればこれが求める正則行列である. ここで,  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  であることに注意する. このとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \text{が } m_1 \text{個}, \lambda_2 \text{が } m_2 \text{個}, \dots, \lambda_k \text{が } m_k \text{個})$$

となる.

$A$  を対角化する  $P$  は沢山取り方がある. 上の手順において,  $\mathbf{p}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{p}_{m_i}^{(i)}$  は,  $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の  $m_i$  個の解で一次独立になっていれば何でも良い. (しかし, 実際は  $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を係数行列の簡約化によって解いて一般の解をベクトルで表示し, その際に用いたベクトルを取ってくるというのが過不足無くベクトルを選んでこられるので良いだろう. 本問の解答例はその方法で選んでいる.) また,  $P$  の各列ベクトルは自由に並べ替えて良い. ただし, その場合は  $P^{-1}AP$  の対角成分の並ぶ順番がそれに応じて変わることとなる.  $P^{-1}AP$  の  $(i, i)$  成分は  $P$  の第  $i$  列ベクトルに対する固有値であるからである.

例えば, 本問の  $C$  の場合, 固有値 3 の固有ベクトルの組として,  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  を選んだが,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形をしているベクトルの組で一次独立なものを選んでいれば何でも良い. 例えば,

$$\mathbf{p}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

等でも良い. また,  $\mathbf{p}_3$  も定数倍して,

$$\mathbf{p}'_3 = -100\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix}$$

のように取り替えても良い. 実際,

$$P' = (\mathbf{p}'_1 \ \mathbf{p}'_2 \ \mathbf{p}'_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -100 \\ 1 & 1 & -100 \\ 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

としても,

$$(P')^{-1}AP' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。また、列を並べ変えて、

$$P'' = (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_2) = \begin{pmatrix} -2 & -100 & 0 \\ 1 & -100 & 1 \\ 1 & -100 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$(P'')^{-1}AP'' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

ちなみに、本問の場合実は

$$C^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = 3C$$

となるので、 $C^n = 3^{n-1}C$  となることは対角化の手法を用いなくてもすぐにわかる。これは  $C$  の各列ベクトルが全て  $C$  の固有値 3 の固有ベクトルとなっているという非常に特殊な性質のためである。

また、本問において、 $A, B$  の固有多項式はそれぞれ、

$$\Phi_A(t) = t^3 \quad \Phi_B(t) = t^2(t-3)$$

となる。実際に上の手順に従ってこれらに対角化不可能であることも確認してもらいたい。

□