線形代数 II 第 5 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の $\mathbb{C}^4$ の元の組が一次独立であるか一次従属であるかを判定せよ．

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 1 解答例． 一次独立である． □

問題 1 補足解説． まず一次独立・一次従属の定義を思い出しておこう．

定義

$\mathbb{C}^n$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が**一次独立** (または**線形独立**) であるとは，条件

$$「c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C} \text{ ならば，必ず } c_1 = \cdots = c_k = 0」$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は**一次従属** (または**線形従属**) であるという．

本問を解くにあたっては以下の定理が便利である．

定理

$\mathbb{C}^n$ の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ に対し，以下は同値である．

(1) $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ は一次独立．

(2) $n \times k$ 行列 $B = (\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_k)$ を考えると，$\operatorname{rank} B = k$.

この定理より，$\mathbb{C}^n$ の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ の一次独立性を知りたい時には，それを並べてできる行列 $B = (\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_k)$ を考え，そのランクを計算すれば良いということがわかる．例えば，問題 1 は以下のように解ける：

問題で与えられた列ベクトルを並べてできる行列

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．B は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となるので,

$$\operatorname{rank} B = 3 = (B \text{ の列の数})$$

である．よって，問題で与えられた $\mathbb{C}^4$ の元の組は一次独立である． □

問題 2

以下の $\mathbb{C}^5$ の元の組が一次独立であるか一次従属であるかを判定せよ．

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

問題 2 解答例. 一次従属である． □

問題 2 補足解説. 問題 1 補足解説に述べた定理を用いて，一次独立性の判定を行う．

問題で与えられた列ベクトルを並べてできる行列

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & -8 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

を考える．B は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\operatorname{rank} B = 3 < (B \text{ の列の数})$$

である．よって，問題で与えられた $\mathbb{C}^5$ の元の組は一次従属である． □

ちなみに,

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

という式は,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & -8 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

と書き直すことができる．よって，$(*)$ を満たす c_1, c_2, c_3, c_4 を見つけるということは，連立一次方程式 $(**)$ を解くことと同じである．上記解答例で求めた係数行列 B の簡約化の結果より，$(**)$ の一般解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -10 \\ -9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \text{ は任意定数}$$

となる．実際に計算してみると，確かに

$$-10\begin{pmatrix}2\\-1\\10\\3\\1\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}-3\\2\\-8\\-2\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\8\\-8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

である． □

問題 3

行列

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

に対し，

$$A^2=\boxed{\text{ア}}A+\boxed{\text{イ}}I_2$$

である．$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 3 解答例． $5,-2.$ □

問題 3 補足解説． 本問は A^2 を具体的に計算して解くこともできるが，ここでは以下のケイリー・ハミルトンの定理を用いて解くことにしよう．

定理 (ケイリー・ハミルトンの定理 (Cayley–Hamilton theorem))

A を n 次正方行列とし，$\Phi_A(t)$ をその固有多項式とする．このとき，

$$\Phi_A(A)=O.$$

ここで，$\Phi_A(A)$ は固有多項式の変数 t に行列 A を代入して計算して得られる n 次正方行列 (ただし定数項 $(-1)^n|A|$ は $(-1)^n|A|I_n$ に置き換える)，O は n 次正方ゼロ行列を表す．

本問の設定に当てはめてみよう．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t)=\left|\begin{pmatrix}t-3&-4\\-1&t-2\end{pmatrix}\right|=(t-3)(t-2)-(-4)(-1)=t^2-5t+6-4=t^2-5t+2.$$

よって，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$$A^2-5A+2I_2=O.$$

これより，

$$A^2=5A-2I_2.$$

□

A が 2 次正方行列のとき，A の固有多項式は

$$\Phi_A(t)=t^2-\mathrm{Tr}(A)t+|A|$$

であった (第 2 回レポート課題問題 3 補足解説参照)．これよりケイリー・ハミルトンの定理から，A が 2 次正方行列のときは，

$$A^2-\mathrm{Tr}(A)A+|A|I_2=O$$

となることがわかる． □

問題 4

行列
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
に対し，
$$A^3 = \boxed{ア}A^2 + \boxed{イ}A + \boxed{ウ}I_3$$
である．$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 4 解答例． $1, 9, -11.$ □

問題 4 補足解説． A の固有多項式は,

$\Phi_A(t)$
$= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ 0 & t+1 & -3 \\ -1 & -2 & t \end{pmatrix} \right|$
$= (t-2)(t+1)t + 0 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot (-2) - (t-2)(-3)(-2) - 0 \cdot 0 \cdot t - (-1)(t+1)(-1)$ (サラスの方法)
$= t^3 - t^2 - 9t + 11.$

よって，ケイリー・ハミルトンの定理より，
$$A^3 - A^2 - 9A + 11I_3 = O.$$
これより，
$$A^3 = A^2 + 9A - 11I_3.$$
□

問題 5

5 次正方行列 A の固有多項式が $\Phi_A(t) = t^5 + t + 1$ であるとき，
$$A^{10} = \boxed{ア}A^4 + \boxed{イ}A^3 + \boxed{ウ}A^2 + \boxed{エ}A + \boxed{オ}I_5$$
である．$\boxed{ア}$〜$\boxed{オ}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 5 解答例． $0, 0, 1, 2, 1.$ □

問題 5 補足解説． A の固有多項式は $\Phi_A(t) = t^5 + t + 1$ なので，ケイリー・ハミルトンの定理より，
$$A^5 + A + I_5 = O.$$
よって，
$$A^5 = -A - I_5$$
なので，
$$A^{10} = (A^5)^2 = (-A - I_5)^2 = A^2 + 2A + I_5.$$
□

正方行列 A の固有多項式がある程度簡単な形をしていれば，本問のようにケイリー・ハミルトンの定理を用いて高次の A のべき乗が計算できることがある．ちなみに，例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\Phi_A(t) = t^5 + t + 1$$

となる． $\square$