線形代数 II 第 6 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{C}^4$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ととる．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^4$ の元の組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ を求めよ．ただし，**ベクトルの順番は並べ替えずに** $\boldsymbol{v}_i$ を i 番目のベクトルと考えて，講義内で説明したアルゴリズムに従って，グラム・シュミットの直交化を行うこと．

問題 1 解答例. グラム・シュミットの直交化法の手順に従って計算する (グラム・シュミットの直交化法の手順については以下の問題 1 補足解説を参照のこと．)：

- $\boldsymbol{u}_1 := \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- $\boldsymbol{u}'_2 := \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，$\boldsymbol{u}_2 := \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}'_2\|}\boldsymbol{u}'_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $\boldsymbol{u}'_3 := \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，

  $\boldsymbol{u}_3 := \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}'_3\|}\boldsymbol{u}'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$
- $\boldsymbol{u}'_4 := \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{u}_3$

  $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，

  $\boldsymbol{u}_4 := \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}'_4\|}\boldsymbol{u}'_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

以上より，求める $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

□

問題 1 補足解説. $\mathbb{C}^n$ の 2 元 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots \\ w_n\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の**エルミート内積 (Hermitian inner product)** は,

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \coloneqq {}^t\overline{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} = \overline{v_1}w_1 + \cdots + \overline{v_n}w_n$$

定義していた．ここで，$z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役 $a - bi$ である $(a, b \in \mathbb{R})$．これを用いて，$\mathbb{C}^n$ の各元の大きさ，および直交性は以下のように定義する．

定義 (大きさ，直交性)

- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し,

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$$

  を $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**という．
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という．

各 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ であり，$\|\boldsymbol{v}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のときだけであったことも思い出そう．

次に本問で練習してもらったグラム・シュミットの直交化法の手順を以下にまとめる．

グラム・シュミットの直交化法 (Gram–Schmidt orthonormalization)

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を $\mathbb{C}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき以下の方法で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ から，各元の大きさが 1 で互いに直交する $\mathbb{C}^n$ の元の組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ を得ることができる．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 \text{とする．}\\
&\boldsymbol{u}'_2 \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1 \text{とし，} \boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_2\|}\boldsymbol{u}'_2 \text{とする．}\\
&\boldsymbol{u}'_3 \coloneqq \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_2 \text{とし，} \boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_3\|}\boldsymbol{u}'_3 \text{とする．}\\
&\quad\vdots\\
&\boldsymbol{u}'_k \coloneqq \boldsymbol{v}_k - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{u}_1 - \cdots - (\boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k)\boldsymbol{u}_{k-1} \text{とし，} \boldsymbol{u}_k \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}'_k\|}\boldsymbol{u}'_k \text{とする．}
\end{aligned}$$

なお，グラム・シュミットの直交化法は初めの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の順番を並べ替えて始めると計算結果が変わってしまう．問題文の但し書きは,「答えを 1 つに定めるために並べ替えをしないでください」という注意であった．また本問のような問題では，計算後に各元の大きさが 1 で互いに直交する $\mathbb{C}^n$ の元の組が本当に得られているかを確認することによって検算が可能である．時間があるときには計算ミスを減らすために検算を行うと良い．

グラム・シュミットの直交化法によって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ から得られるベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は以下の性質 (I)–(III) を持っている．

(I) $\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{v}_1$ の定数倍である．

(II) 各 $\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ の一次結合 ($c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_i\boldsymbol{v}_i, c_1, \ldots, c_i \in \mathbb{C}$ の形) で書ける．

(III) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は一次独立である．

(II) はグラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムから帰納的にわかる ((I) は (II) の $i=1$ の場合である).
(III) は以下のように証明できる.

　ある $c_1,\dots,c_k \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0}$$

となったと仮定する．このとき，$i=1,\dots,k$ に対し,

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{u}_k)\\ &= c_1(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_k(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_k)\\ &= c_i \quad (\boldsymbol{u}_j \text{らは大きさが 1 で互いに直交するので}).\end{aligned}$$

よって一次独立性の定義より，$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ は一次独立. □

問題 2

$\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ を

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\ 2i\\ 1-i\end{pmatrix}$$

ととる (i は虚数単位)．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，**ベクトルの順番は並べ替えずに** $\boldsymbol{v}_i$ を i 番目のベクトルと考えて，講義内で説明したアルゴリズムに従って，グラム・シュミットの直交化を行うこと.

問題 2 解答例. グラム・シュミットの直交化法の手順に従って計算する：

- $\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}.$
- $\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 0\end{pmatrix} - \dfrac{(2-i)}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+i\\ 2+i\\ 1+2i\end{pmatrix}$ より,

  $\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1+i\\ 2+i\\ 1+2i\end{pmatrix}.$
- $\boldsymbol{u}_3' \coloneqq \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\ 2i\\ 1-i\end{pmatrix} - \dfrac{4+i}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix} - \dfrac{2}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1+i\\ 2+i\\ 1+2i\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-i\\ i\\ 1\end{pmatrix}$ より,

  $\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-i\\ i\\ 1\end{pmatrix}.$

以上より，求める $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ は,

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1+i\\ 2+i\\ 1+2i\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-i\\ i\\ 1\end{pmatrix}.$$

□

問題 2 補足解説. 本問も問題 1 補足解説に述べたグラム・シュミットの直交化法に従って計算を行えば良い．エルミート内積では左側のベクトルの成分に複素共役を取って計算する必要があることを忘れないようにしよう. □