線形代数 II 第 7 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を対角化する実直交行列 U を 1 つ求め，A を対角化せよ．

※答えを見て採点を行うが，どのように計算したかわかる程度の計算の過程を記載した紙やノートも添付すること．計算の過程が全く記載されていない場合，**答えが合っていても 0 点とする**．なお，書ききれる場合には別用紙にしなくても以下の解答スペースの余白部分に計算の過程を記載すれば良い．

問題 1 解答例. A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t & -1 & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t & -1 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 & -1 \\ -t^2+1 & t & t & -1 \\ t & -2 & -1 & t \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 } 1, 2 \text{ 列に第 } 3 \text{ 列の } (-t) \text{ 倍, } 1 \text{ 倍をそれぞれ加えた}) \\
&= \left| \begin{pmatrix} -1 & t & -1 \\ -t^2+1 & t & -1 \\ t & -2 & t \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 } 1 \text{ 行に関して余因子展開}) \\
&= \left| \begin{pmatrix} t^2-2 & 0 & 0 \\ -t^2+1 & t & -1 \\ t & -2 & t \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 } 1 \text{ 行に第 } 2 \text{ 行の } (-1) \text{ 倍を加えた}) \\
&= (t^2-2) \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -2 & t \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 } 1 \text{ 行に関して余因子展開}) \\
&= (t^2-2)^2 = (t+\sqrt{2})^2 (t-\sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-\sqrt{2}$ (重複度 2), $\sqrt{2}$ (重複度 2) である．

固有値 $-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルは x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-\sqrt{2} I_4 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ として与えられる．係数行列 $-\sqrt{2}I_4 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \text{は任意定数}$$

となる．これより，固有値 $-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ をグラム・シュミットの直交化法により直交化すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{u}_2' &:= \boldsymbol{p}_2 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{u}_2 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

固有値 $\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルは x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(\sqrt{2}I_4 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ として与えられる．係数行列 $\sqrt{2}I_4 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \text{は任意定数}$$

となる．これより，固有値 $\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．ここで，$\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ をグラム・シュミットの直交化法により直交化すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_3 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{u}_4' &:= \boldsymbol{p}_4 - (\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_4)\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{u}_4 &:= \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_4'\|}\boldsymbol{u}_4' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_4 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

以上より，

$$U := (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3\ \boldsymbol{u}_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすると，U は実直交行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ となる． □

問題 1 補足解説． エルミート行列はユニタリ行列を用いて**必ず対角化できる**のであった．その手順は以下のようにまとめられる．一言で言えば，**通常の対角化のときの方法で固有ベクトルを選ぶが，固有ベクトルを選んだ後にグラム・シュミットの直交化法のステップを 1 つ挟む**というだけである．

なお，エルミート行列が実行列，すなわち実対称行列であった場合は以下の手順は全て $\mathbb{R}^n$ の範囲で行うことができ，最終的に得られるユニタリ行列も実行列，すなわち実直交行列として取れる．

エルミート行列 A を対角化するユニタリ行列 U を求める手順

(1) A の固有方程式 $\Phi_A(t)=0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$,\dots,\lambda_k$(重複度 m_k) とする．

(2) 各 λ_i $(i=1,\dots,k)$ に対して，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く．このとき，A は対角化可能であるから解の自由度は m_i となるので，この解の全体はある $\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}\in\mathbb{C}^n$ を用いて，

$$c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)}+\cdots+c_{m_i}\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)},\qquad c_1,\dots,c_{m_i}\text{は任意定数}$$

と書ける．ここで，$\{\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}\}$ に**グラム・シュミットの直交化法を適用して**，互いに直交する大きさ 1 の元からなるベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{u}_{m_i}^{(i)}\}$ を得る．こうして得られる $\boldsymbol{u}_k^{(i)}$ らを並べて n 次正方行列

$$U=(\underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(1)}\ \cdots\ \boldsymbol{u}_{m_1}^{(1)}}_{m_1\text{個}}\ \underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(2)}\cdots\boldsymbol{u}_{m_2}^{(2)}}_{m_2\text{個}}\ \cdots\ \underbrace{\boldsymbol{u}_1^{(k)}\cdots\boldsymbol{u}_{m_k}^{(k)}}_{m_k\text{個}})$$

を作ればこれが求めるユニタリ行列 U である．このとき，

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0&0&0&0\\ 0&\ddots&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda_1&0&0&0&0\\ &\cdots&&\ddots&&\cdots&\\ 0&0&0&0&\lambda_k&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ddots&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda_k\end{pmatrix}\quad(\lambda_1\text{が }m_1\text{個},\lambda_2\text{が }m_2\text{個},\dots,\lambda_k\text{が }m_k\text{個})$$

となる．

なお，上記手順において $\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ を取る方法は 1 通りではないので，エルミート行列 A を対角化するユニタリ行列 U の取り方は 1 通りではない．（この注意は通常の対角化の場合も同様である．） □

問題 2

エルミート行列

$$A=\begin{pmatrix}-1&i&-\sqrt{2}\\ -i&-1&i\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}&-i\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

を対角化するユニタリ行列 U を 1 つ求め，A を対角化せよ (i は虚数単位).

※答えを見て採点を行うが，どのように計算したかわかる程度の計算の過程を記載した紙やノートも添付すること．計算の過程が全く記載されていない場合，**答えが合っていても 0 点とする**．なお，書ききれる場合には別用紙にしなくても以下の解答スペースの余白部分に計算の過程を記載すれば良い．

問題 2 解答例． A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}\Phi_A(t)&=\left|\begin{pmatrix}t+1&-i&\sqrt{2}\\ i&t+1&-i\sqrt{2}\\ \sqrt{2}&i\sqrt{2}&t\end{pmatrix}\right|\\ &=(t+1)^2t+(-i)(-i\sqrt{2})\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\cdot i\sqrt{2}-(t+1)(-i\sqrt{2})i\sqrt{2}-(-i)it-\sqrt{2}(t+1)\sqrt{2}\ (\text{サラスの方法})\\ &=t^3+2t^2-4t-8=(t+2)^2(t-2)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -2 (重複度 2)$,2$ (重複度 1) である．

固有値 -2 に対する固有ベクトルは x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i & \sqrt{2} \\ i & -1 & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & i\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ として与えられる．係数行列 $-2I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \text{は任意定数}$$

となる．これより，固有値 -2 に対する固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ をグラム・シュミットの直交化法により直交化すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{u}_2' &\coloneqq \boldsymbol{p}_2 - (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

固有値 2 に対する固有ベクトルは x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -i & \sqrt{2} \\ i & 3 & -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の $\mathbf{0}$ でない解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ として与えられる．係数行列 $2I_3 - A$ は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \text{ は任意定数}$$

となる．これより，固有値 2 に対する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる．よって，$\boldsymbol{p}_3$ の大きさを 1 にして，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -i & i \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすると，U はユニタリ行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 2 補足解説. 本問も問題 1 補足解説に述べた手順に従って計算を行えば良い．エルミート内積では左側のベクトルの成分に複素共役を取って計算していたということを忘れないようにしよう． □