線形代数 II 第 9 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 = y^2 \right\}$$

問題 1 解答例. 部分空間でない． □

問題 1 補足解説. まず部分空間の定義を思い出しておこう．

定義

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，V の部分集合 W が V の**部分空間**であるとは，

(s1) $\mathbf{0} \in W$，($\mathbf{0}$ は V の零ベクトル)
(s2) 任意の $w_1, w_2 \in W$ に対し，$w_1 + w_2 \in W$，(W は**和で閉じている**という)
(s3) 任意の $c \in \mathbb{K}$，$w \in W$ に対し，$cw \in W$，(W は**スカラー倍で閉じている**という)

が満たされることを言う．

$(V, +, \cdot)$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，W をその部分空間とするとき，$(W, +, \cdot)$ は再びベクトル空間となることに注意しよう．ただし，$(W, +, \cdot)$ の $+, \cdot$ はそれぞれ V の $+, \cdot$ から定義域，終域を制限して得られる和とスカラー倍とする．逆に，$(W, +, \cdot)$ がベクトル空間となるのであれば，W は (s1), (s2), (s3) を満たしている必要がある (そうしないと W の中で和やスカラー倍が定義されないので)．よって，部分空間とは，「ベクトル空間に含まれるベクトル空間」ということができる．

注意. 『部分集合』と『部分空間』という言葉は違う意味であるということをしっかり意識するようにしよう．これらの言葉を混同して使ってしまう事例が頻繁に見られる．部分集合というのはもとの集合から単に元をいくつか (無限個かもしれない) 選んできて得られる集合のことであって，部分空間というのは上で述べたようにそのような部分集合のうち，さらに (s1)，(s2)，(s3) という条件を満たす特別なもののことを指している．

与えられた部分集合 W が部分空間であるかどうかを確かめるためには，W が定義の (s1)，(s2)，(s3) を全て満たすかどうかを順にチェックすれば良い．

問題 1 の W が部分空間でないことは以下のように示される：

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると，$w_1, w_2 \in W$．一方，

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W.$$

よって，W は和で閉じておらず，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない． □

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

上のように部分空間でないことを示すためには，以下のいずれか (1 つ) を行えばよい：

- $\mathbf{0}$ が含まれないことを示す ((s1) が成り立たないこと).
- (s2) が成立しないことを示す**具体的な反例**を挙げる.
- (s3) が成立しないことを示す**具体的な反例**を挙げる.

ちなみに本問の W の場合，$\mathbf{0} \in W$ であり，(s3) も成立するので，上のように (s2) が成立しないことを示す具体的な反例を挙げることになる． □

問題 2

$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^3 \right\}$$

問題 2 解答例. 部分空間である． □

問題 2 補足解説. W が問題 1 補足解説にのべた部分空間の定義の (s1), (s2), (s3) を満たすことを確認する：

まず，

$$x^3 = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$$

となるが，$x, y \in \mathbb{R}$ のとき，

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2} y \right)^2 + \frac{3}{4} y^2 \geq 0$$

であり，等号成立は $x = y = 0$ のときのみである．よって，

$$x^3 = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

である．これより，

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\}$$

である．右辺の部分集合が部分空間の定義条件を満たすことを示そう．

まず，$0 = 0$ なので，$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ である．

次に，任意の 2 元 $w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ に対し，

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_1$$

となるので，

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in W.$$

さらに，任意の $c \in \mathbb{R}, w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ に対し，

$$cx = cy$$

となるので，

$$cw = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \in W.$$

以上より，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である． □

本問は W の条件式に 3 次式が入っているので，問題 1 と同様に部分空間でないと判断してしまった方もおられるかもしれない．実際，$x^3 = y^3$ という条件のまま考えてしまうと，「$x_1^3 = y_1^3$ かつ $x_2^3 = y_2^3$ だからと言って，$(x_1 + x_2)^3 = (y_1 + y_2)^3$ になるとは限らないのではないか」ということで，和で閉じていない (=(s2) を満たさない) と考えた方もおられるだろう．しかし，問題 1 補足解説に書いた通り，もし部分空間でないのであれば，**具体的な反例**を挙げる必要がある．そこで具体的に反例を構成しようと考えると，2 つの実数 x, y が $x^3 = y^3$ を満たすのであれば，$x = y$ となってしまい，反例が構成できないということに気付くだろう．

ちなみに，上の解答を見ればわかる通り，本問において W が部分空間となるのは $\mathbb{R}$ 上で考えていることが本質的である．$\mathbb{C}^2$ における同様の部分集合

$$W_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x^3 = y^3 \right\}$$

を考えると，これは $\mathbb{C}^2$ における**部分空間にはならない**．例えば，$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると，$\omega^3 = \overline{\omega}^3 = 1$ なので，

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\omega} \end{pmatrix}$$

とすると，$w_1, w_2 \in W_{\mathbb{C}}$ であるが，

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W_{\mathbb{C}}$$

である．よって，$W_{\mathbb{C}}$ は和で閉じていない． □

問題 3

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考えたとき，以下の $\mathbb{R}^3$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 3 解答例. 部分空間である． □

問題 3 補足解説. W が問題 1 補足解説にのべた部分空間の定義の (s1), (s2), (s3) を満たすことを確認する：

まず，$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので，$\mathbf{0} \in W$ である．

次に，任意の 2 元 $w_1, w_2 \in W$ に対し，

$$A(w_1 + w_2) = Aw_1 + Aw_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となるので，$w_1 + w_2 \in W$.

さらに，任意の $c \in \mathbb{R}, w \in W$ に対し，

$$A(cw) = c(Aw) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となるので，$cw \in W$.

以上より，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である． □

上の証明を見ると，A の具体的な形は一切使っていないということがわかる．実際，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ として，A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列としたとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分集合

$$W_A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

が $\mathbb{K}^n$ の部分空間となることが上と全く同じ証明によって示される．なお，この空間の一般の元の形を求めることは係数行列を A とする連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

の一般解を求めることに他ならないということに注意しよう．□

問題 4

$\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t A = A \right\}.$$

ここで，${}^t A$ は A の転置を表す．

問題 4 解答例. 部分空間である．□

問題 4 補足解説. 一般に，$\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列全体のなす集合を

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K}\ (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n) \right\}$$

と書いていたことを思い出そう．このとき，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は行列の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となるのであった．

W が問題 1 補足解説にのべた部分空間の定義の (s1), (s2), (s3) を満たすことを確認する：

まず，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，${}^t O = O$ なので，$O \in W$ である．

次に，任意の 2 元 $A_1, A_2 \in W$ に対し，

$${}^t(A_1 + A_2) = {}^t A_1 + {}^t A_2 = A_1 + A_2$$

となるので，$A_1 + A_2 \in W$.

さらに，任意の $c \in \mathbb{C}, A \in W$ に対し，

$${}^t(cA) = c\,{}^t A = cA$$

となるので，$cA \in W$.

以上より，W は $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ の部分空間である．□

ちなみに，上と全く同様の証明で，一般の正の整数 n に対し，

$$W = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \,\middle|\, {}^t A = A \right\}$$

が $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分空間であることが示される．この W は n 次**対称行列**全体のなす部分集合である．□

問題 5

$\mathbb{C}[x]$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える．このとき，以下の $\mathbb{C}[x]$ の部分集合が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$W = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0)f(1) = 0\}$$

ここで，$f(0), f(1)$ はそれぞれ多項式 $f(x)$ の x に $0, 1$ を代入したものを表す．

問題 5 解答例. 部分空間でない． □

問題 5 補足解説. 一般に，$\mathbb{K}$ の元を係数とする 1 変数多項式全体のなす集合を

$$\mathbb{K}[x] \coloneqq \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

と書いていたことを思い出そう．このとき，$\mathbb{K}[x]$ は通常の多項式の和とスカラー倍に関して $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となるのであった．

W において (s2) が成立しないことを示す**具体的な反例**を挙げる：

$$f_1(x) \coloneqq x, \qquad f_2(x) \coloneqq -1 + x$$

とすると，$f_1(0) = f_2(1) = 0$ なので，$f_1(x), f_2(x) \in W$．一方，

$$g(x) \coloneqq f_1(x) + f_2(x) = -1 + 2x$$

とすると，$g(0)g(1) = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$ となるので，$g(x) \notin W$．

よって，W は和で閉じておらず，W は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない． □

ちなみに，

$$W' = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

とすれば，これは $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である．練習として各自証明を考えてもらいたい． □