線形代数 II 第 10 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ の以下の部分集合が一次独立かどうかを判定せよ．

$$\{1-x+x^2, 1+2x, x+2x^2\}$$

問題 1 解答例. 一次独立である． □

問題 1 補足解説. 一般のベクトル空間における一次独立性の定義は，$\mathbb{C}^n$ における一次独立の定義で $\mathbb{C}^n$ としていたところを一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えたものである．

定義

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の元の組 $v_1, \dots, v_k$ が ($\mathbb{K}$ 上) **一次独立** (または**線形独立**) であるとは，条件

$$「c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = \mathbf{0},\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \text{ ならば，} c_1 = \cdots = c_k = 0」$$

が成立することを言う．$v_1, \dots, v_k$ が一次独立でないとき，$v_1, \dots, v_k$ は ($\mathbb{K}$ 上) **一次従属** (または**線形従属**) であるという．
また，V の元からなる無限集合 B が**一次独立**であるとは，B の任意の有限部分集合 $\{v_1, \dots, v_k\} \subset B$ が上の意味で一次独立な集合となることをいう．

この定義に基づいて，問題 1 の元の組の一次独立性は以下のように判定できる：
ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$c_1(1-x+x^2) + c_2(1+2x) + c_3(x+2x^2) = 0$$

となったと仮定する ($\mathbb{R}[x]$ における $\mathbf{0}$ は 0 であったことに注意する)．上式を整理すると

$$(c_1+c_2) + (-c_1+2c_2+c_3)x + (c_1+2c_3)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

となるので，元の組 $1-x+x^2, 1+2x, x+2x^2$ は一次独立である． □

問題 2

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の以下の部分集合が一次独立かどうかを判定せよ．

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 解答例. 一次従属である. □

問題 2 補足解説. 問題 1 補足解説の定義に基づいて, 問題 1 の元の組の一次独立性は以下のように判定できる：

ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

となったと仮定する ($\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ における $\mathbf{0}$ はゼロ行列であったことに注意する). 上式を整理すると

$$\begin{pmatrix} c_1 - c_2 + c_3 + 2c_4 & c_1 - c_2 \\ 2c_2 + c_3 & c_1 + c_3 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. ここで, c_1, c_2, c_3, c_4 に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 + c_4 = 0 \end{cases}$$

の一般の解は,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \text{ は任意定数}$$

となる. これは, $(*)$ を満たす c_1, c_2, c_3, c_4 が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ 以外にも存在することを示しているので, 元の組 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は一次従属である. □

問題 3

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

が生成する部分空間 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} S$ として正しいものを<u>全て選択</u>せよ.

(1) $\mathbb{R}^3$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

(3) $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(4) $\{cv \mid c \in \mathbb{R}, v \in S\}$

問題 3 解答例. (2), (3) □

問題 3 補足解説. まず, ベクトル空間の部分集合によって生成される部分空間の定義を思い出そう.

定義

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 S に対し，S の元の一次結合全体からなる集合を $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S$ と書き，これを S によって**生成される** (または**張られる**) 部分空間という．つまり，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} S &\coloneqq \{c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_k \in S\} \\ &= \left\{ \sum_{v\in S} c_v v \;\middle|\; c_v \in \mathbb{K},\ \text{ただし，有限個を除いて } 0 \right\}\end{aligned}$$

とする．

本問の S に対する $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ を計算してみよう．

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (c_1 + c_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (c_2 - c_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

となるので，(3) の部分集合は $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ に等しい．ここで，x, y, z に関する一次方程式

$$x + y + z = 0$$

の一般の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-c_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \text{は任意の実数}$$

となるので，(2) と (3) は部分集合として同じものである．よって，(2) も $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ に等しい．(2) の部分集合は明らかに $\mathbb{R}^3$ 全体ではないので，(1) は $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ ではない．(4) は，S の各元の定数倍しか含んでいないので，和で閉じておらず，そもそも $\mathbb{R}^3$ の部分空間となっていない．例えば，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は (4) の集合には含まれていない．よって，これも $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ とは異なる集合である．以上より，$\operatorname{span}_{\mathbb{R}} S$ に等しい部分集合は (2) と (3) である． □

問題 4

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の以下の部分集合が $\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうかを判定せよ．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 4 解答例. 基底である. □

問題 4 補足解説. 一般のベクトル空間における基底の定義は以下であった.

定義

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし, V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. V の部分集合 B が次の性質 (b1), (b2) を満たすとき, B を V の**基底** (basis) という.

(b1) B は一次独立である.
(b2) B は V を生成する. つまり. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である.

よって, 与えられた部分集合が基底であるかどうかを確かめるためには, その集合が基底の定義条件 (b1), (b2) を満たすかどうかをチェックすれば良い. 本問の集合が基底であることは以下のように確かめられる：

ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となることは,

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 9 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

となることと同値である. ここで, c_1, c_2, c_3 に関する連立一次方程式 $(*)$ の係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 9 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので, $\operatorname{rank} A = 3$ である. よって, $(*)$ を満たす c_1, c_2, c_3 は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみである. これより, $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ は一次独立である.

さらに $\operatorname{rank} A = 3$ であることから A は正則行列なので, 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たす $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が存在する ($\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right) = A^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ とすれば良い). これは任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在するということと等価である. よって,

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

である．以上より，$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である． □

ここでの議論と全く同様に考えることで，$\mathbb{K}^n$ の基底については以下が成り立つことがわかる (次回の講義の冒頭で扱う).

定理

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}^n$ の部分集合 B に対し以下は同値である．

(1) B は $\mathbb{K}^n$ の基底である．

(2) B は n 個の元からなる一次独立な集合である．

(3) B は n 個の元からなり，$B = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ と書くと，

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$$

は n 次正則行列である．

□

問題 5

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\}$$

を考える．このとき，以下の部分集合が W の基底であるかどうかを判定せよ．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 5 解答例． 基底である． □

問題 5 補足解説． 与えられた部分集合が問題 4 補足解説にある基底の定義条件 (b1), (b2) を満たすことを確認する．まず，ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となったと仮定すると，このとき

$$\begin{pmatrix} c_3 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である．よって，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．次に，

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

となるので, $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ は W を生成する. 以上より, $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ は W の基底である. $\square$