線形代数 II 第 11 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の以下の写像 φ が $\mathbb{R}$ 上の線形写像であるかどうかを判定せよ．

$$\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ f(x) \mapsto (1+x^2)f'(x) + f''(x).$$

ここで，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ の微分，$f''(x)$ は多項式 $f(x)$ の二階微分を表す．

問題 1 解答例. $\mathbb{R}$ 上の線形写像である． □

問題 1 補足解説. まず，線形写像の定義を思い出そう．

定義

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $\varphi\colon V \to W$ が ($\mathbb{K}$ 上) の**線形写像**であるとは,

(L1) 任意の $v, v' \in V$ に対し，$\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$,
(L2) 任意の $c \in \mathbb{K}, v \in V$ に対し，$\varphi(cv) = c\varphi(v)$,

を満たすことである．

与えられた写像が線形写像であるかどうかを判定するためには，それが定義条件の (L1), (L2) を満たすかどうかを確認すれば良い．本問の場合に確認してみよう．

任意の $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x], c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned}\varphi(f(x)+g(x)) &= (1+x^2)(f(x)+g(x))' + (f(x)+g(x))'' \\ &= (1+x^2)(f'(x)+g'(x)) + (f''(x)+g''(x)) \\ &= (1+x^2)f'(x) + f''(x) + (1+x^2)g'(x) + g''(x) \\ &= \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(cf(x)) &= (1+x^2)(cf(x))' + (cf(x))'' \\ &= (1+x^2)cf'(x) + cf''(x) \\ &= c((1+x^2)cf'(x) + f''(x)) \\ &= c\varphi(f(x))\end{aligned}$$

となるので，φ は線形写像である． □

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．このとき，微分

$$\frac{d}{dx}\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto f'(x)$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

は線形写像である (微分の線形性)．さらに，線形写像の合成は線形写像であったので，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，n 階微分

$$\frac{d^n}{dx^n} \coloneqq \underbrace{\frac{d}{dx} \circ \cdots \circ \frac{d}{dx}}_{n\text{ 個}} \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto f^{(n)}(x)$$

も線形写像となる．

また，任意の多項式 $c(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対し，

$$m_{c(x)} \colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x],\ f(x) \mapsto c(x)f(x)$$

は線形写像である (各自確認せよ)．これを用いると，本問の線形写像 φ は講義内で定義した線形写像の和とスカラー倍を用いて

$$\varphi = m_{1+x^2} \circ \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

と表される．よって，φ も線形写像である． □

問題 2

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の間の以下の写像 φ が $\mathbb{C}$ 上の線形写像であるかどうかを判定せよ．

$$\varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}.$$

ここで，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数を表す．

問題 2 解答例. $\mathbb{C}$ 上の線形写像でない． □

問題 2 補足解説. $i \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\varphi(i \cdot 1) = \varphi(i) = \overline{i} = -i \qquad\qquad i \cdot \varphi(1) = i \cdot \overline{1} = i \cdot 1 = i$$

となるので，$\varphi(i \cdot 1) \neq i \cdot \varphi(1)$ であるため，φ は $\mathbb{C}$ 上の線形写像でない． □

φ は,

$$\varphi(z + z') = \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} = \varphi(z) + \varphi(z'),\ \forall z, z' \in \mathbb{C}$$

を満たすので，線形写像の定義条件 (L1) は満たす写像である．よって，本問においては (L2) を満たさないことに気付く必要がある．なお一般に，$c \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\varphi(cz) = \overline{c}\varphi(z)$$

となる．特に，$c \in \mathbb{R}$ であれば,

$$\varphi(cz) = c\varphi(z)$$

となるので，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなせば，$\varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形写像であると言える． □

問題 3

$\mathbb{R}$ 上の線形写像 $\varphi\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ が,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

を満たすとき,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\ \boxed{\text{イ}}\\ \boxed{\text{ウ}}\end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ウ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ.

問題 3 解答例. $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}$ □

問題 3 補足解説. 線形写像の定義条件 (L1) より，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

の一次結合で書ければ $\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ の値が計算できることがわかる．そこで,

$$c_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1-c_2-c_3 & c_1+c_2+3c_3+c_4\\ -c_1-c_3-c_4 & c_1+c_2+4c_3+2c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とすると，これを満たす c_1, c_2, c_3, c_4 は c_1, c_2, c_3, c_4 に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1-c_2-c_3 = 1\\ c_1+c_2+3c_3+c_4 = 0\\ -c_1-c_3-c_4 = 0\\ c_1+c_2+4c_3+2c_4 = 1\end{cases}$$

の解である．これを解くと,

$$c_1 = -1,\ c_2 = -4,\ c_3 = 2,\ c_4 = -1$$

となる．よって,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right)\\ &= -\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) - 4\varphi\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) + 2\varphi\left(\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right)\\ &= -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

実は,

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底となっている (確かめてみよ)．一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V とその基底 B が与えられたとき，B の元の一次結合で V の全ての元は表示できるので，V を定義域とする線形写像は B の元の像を決めれば本問のように一意的に決まってしまうことがわかる． □

問題 4

3×4 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，以下の $\mathbb{R}$ 上の線形写像 φ_A について述べたものとして正しいものを選択せよ．

$$\varphi_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}.$$

(1) 同型写像である．
(2) 全射であるが単射でない．
(3) 全射ではないが単射である．
(4) 全射でも単射でもない．

問題 4 解答例． (2) □

問題 4 補足解説． $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，$\varphi\colon V \to W$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の間の線形写像としたとき，

$$\varphi \text{ は単射} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$$

という同値関係が成り立つのであった．これを念頭におくと，本問の φ_A が全射であるが単射でないことは以下のように示される：

$$\operatorname{Ker}\varphi_A = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \varphi_A\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

であるが，c_1, c_2, c_3, c_4 に関する連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えると，これは A の行数が 3 であるから A の階数は必ず 3 以下であることより，その解の自由度は

$$4 - \operatorname{rank} A \geq 4 - 3 = 1$$

となって，必ず $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つことがわかる．よって，$\operatorname{Ker}\varphi_A \neq \{\mathbf{0}\}$ となるので，φ_A は単射ではない．

次に，φ_A が全射であることを示そう．φ_A が全射であるということは，任意の $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，

$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を満たす $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ が存在するということと同値である．ここで A は行基本変形を用いて簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix}$$

となるので，$\operatorname{rank} A = 3$ である．このとき，拡大係数行列

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -1 & -1 & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

についても $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 3$ となるので，c_1, c_2, c_3, c_4 に関する連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

は任意の $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して解を持つ．よって，φ_A は全射である． □

拡大係数行列を用いて連立一次方程式の解の存在を判定する手法については第 1 回レポート課題解答例問題 7 補足解説を参照のこと．実は本問と同様の考察で一般に以下のことが証明される．

定理

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ とし，$\mathbb{K}$ 上の線形写像 φ_A を

$$\varphi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

と定める．このとき，

(1) φ_A は単射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$.
(2) φ_A は全射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = m$.
(3) φ_A は同型写像 $\Leftrightarrow$ $m = n$ かつ $\operatorname{rank} A = m$ $\Leftrightarrow$ $m = n$ かつ A は正則.

□

問題 5

以下の $\mathbb{C}$ 上の線形写像 φ について述べたものとして正しいものを選択せよ．

$$\varphi\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b+2d \\ 2a-c & a+b+d \end{pmatrix}$$

(1) 同型写像である．
(2) 全射であるが単射でない．
(3) 全射ではないが単射である．
(4) 全射でも単射でもない．

問題 5 解答例. (1) □

問題 5 補足解説. 線形写像 φ が**同型写像**であるとは φ が全単射であるという意味であった．そこで，問題 4 補足解説と同様に φ が単射かつ全射であることを順に示そう：

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a+c & b+2d \\ 2a-c & a+b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

である．ここで，a, b, c, d に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+2d=0 \\ 2a-c=0 \\ a+b+d=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考える．この連立一次方程式の係数行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$\operatorname{rank} A = 4$ である．よって，上の連立一次方程式の解の自由度は $4 - \operatorname{rank} A = 0$ であり，解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のみであることがわかる．よって，

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となるので，φ は単射である．

次に，φ が全射であることを示そう．φ が全射であるということは，任意の $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ に対し，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+c & b+2d \\ 2a-c & a+b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ が存在するということと同値である．ここで，a, b, c, d に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a+c=x_1 \\ b+2d=x_2 \\ 2a-c=x_3 \\ a+b+d=x_4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

を考える．上の計算より，この連立一次方程式の係数行列 A の階数は 4 であったので，A は正則であり，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

がこの連立一次方程式の解となることがわかる．よって，φ は全射である． □