線形代数 II 第 12 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

4×8 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 10 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^8$ の部分空間

$$W_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^8 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

の次元 $\dim_{\mathbb{R}} W_A$ を求め，その値を半角数字で入力せよ．

問題 1 解答例. $\dim_{\mathbb{R}} W_A = 5$. □

問題 1 補足解説. まず一般に W_A の形の空間の基底がどのように求められたかを思い出そう．

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対し，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は $n - \mathrm{rank}\, A$ となるので，ある $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\mathrm{rank}\, A} \in \mathbb{K}^n$ が存在して，

$$\begin{aligned} W_A \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} &= \{c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_{n-\mathrm{rank}\, A}\boldsymbol{p}_{n-\mathrm{rank}\, A} \mid c_1, c_2, \dots, c_{n-\mathrm{rank}\, A} \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\mathrm{rank}\, A}\} \end{aligned}$$

となる．このとき

$$B = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_{n-\mathrm{rank}\, A}\}$$

は自動的に一次独立となり，これが W_A の基底を与える．すなわち，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = n - \mathrm{rank}\, A$$

となる．本問の場合にこれを適用してみよう：

W_A は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^8$ の部分空間である．係数行列 A を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 & -6 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$\mathrm{rank}\, A = 3$ である．よって，

$$\dim_{\mathbb{R}} W_A = 8 - 3 = 5$$

である． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

W_A の基底の計算も具体的に行っておこう．上の簡約化の結果より，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 6x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 9x_8 \\ x_2 = -x_3 + 4x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ x_4 = -4x_5 - 3x_6 - 2x_7 - 4x_8 \end{cases}$$

という連立一次方程式と同値なので，

$$\begin{aligned} W_A &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

である．そこで，

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると，これが W_A の基底の 1 つとなる (たしかに一次独立であることを各自確認せよ)． □

問題 2

行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値 λ に対応する固有空間を $V_A(\lambda)$ と書く (固有空間は $\mathbb{C}^3$ の部分空間として考える)．λ が A の固有値全体を動くとき，固有空間 $V_A(\lambda)$ の次元 $\dim_{\mathbb{C}} V_A(\lambda)$ として最も大きいものの値を半角数字で入力せよ．

問題 2 解答例． 2. □

問題 2 補足解説． 本問は A の固有値を全て求め，各固有空間の次元を順に求めれば答えられるが，ここでは先に少し一般論の考察を行っておくことで計算を楽にしてみよう．

n 次正方行列 A の固有値 λ に対応する固有空間 $V_A(\lambda)$ の定義は，

$$V_A(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

であるので，問題 1 補足解説で用いた記号を用いると，

$$V_A(\lambda) = W_{\lambda I_n - A}$$

である．よって，問題 1 補足解説での考察より，

$$\dim_{\mathbb{C}} V_A(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} W_{\lambda I_n - A} = n - \operatorname{rank}(\lambda I_n - A)$$

である．さらに，固有値 λ の重複度を m_λ と書くと，A が対角化可能であることと，A の全ての固有値 λ に対して

$$m_\lambda = n - \operatorname{rank}(\lambda I_n - A)$$

となることは同値であったが，上の考察で右辺の値は固有空間 $V_A(\lambda)$ の次元であることがわかったので，以前の対角化可能性の判定条件は以下のように述べられることがわかる．

定理

n 次正方行列 A に対して，以下の (1), (2) は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A の全ての固有値 λ に対し，固有値 λ に対応する固有空間の次元が λ の重複度に等しい．

問題 2 の行列は実対称行列なので，対角化可能である．これより定理から，固有空間 $V_A(\lambda)$ の次元は固有値 λ の重複度に等しいことがわかる．いま，A の固有多項式は,

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -t+1 & t-2 & -1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に第 2 列の} -1 \text{倍を加えた}) \\ &= \left|\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t-3 & -2 \\ 0 & -1 & t-2 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2 行に第 1 行を加えた}) \\ &= (t-1)\left|\begin{pmatrix} t-3 & -2 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\ &= (t-1)(t^2-5t+4) = (t-1)^2(t-4)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 1(重複度 2), 4(重複度 1) である．よって，

$$\dim_{\mathbb{C}} V_A(1) = 2, \qquad \dim_{\mathbb{C}} V_A(4) = 1$$

となる．よって，本問の答えはこのうち大きい方の 2 である． □

ちなみに，具体的に固有空間を求めた方のために，各固有空間の具体形も記載しておくと，

$$\begin{aligned} V_A(1) &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\} \\ V_A(4) &= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

である． □

問題 3

以下の $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間から，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として $\mathbb{R}^6$ と同型なものを全て選択せよ．

(1) $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{C}^6$.

(3) $\{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$.

(4) $\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)$ は 6 次以下 $\}$.

問題 3 解答例. (1), (3) □

問題 3 補足解説. 本問を解くにあたって講義内で扱った以下の定理を思い出そう．これは，同型なものを同一視すると有限次元ベクトル空間が次元で完全に分類できるということを主張している．

定理

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．このとき，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 W に対し，以下は同値.

(1) $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間として，W は V と同型 (つまり，$W \simeq V$).

(2) $\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} V$.

この定理より，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V と $\mathbb{R}^6$ が同型であることは,

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^6 = 6$$

となることと同値なので，結局 $\mathbb{R}$ 上 6 次元のベクトル空間を全て選択すれば良いことがわかる．以下，(1)–(4) のベクトル空間の $\mathbb{R}$ 上の次元を順に求めてみよう．

<u>(1)</u>

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) &= \left\{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right\}\end{aligned}$$

である．よって,

$$B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

とすると，これが $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ の基底の 1 つとなる (一次独立性は各自確認せよ)．よって,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = |B| = 6$$

となり，$\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^6$ である．ちなみに $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき，同様の考察により,

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$$

となる．

<u>(2)</u>

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^6 &= \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6\end{pmatrix} \,\middle|\, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x_1+y_1 i \\ x_2+y_2 i \\ x_3+y_3 i \\ x_4+y_4 i \\ x_5+y_5 i \\ x_6+y_6 i\end{pmatrix} \,\middle|\, x_j, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, 6\right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

である (i は虚数単位)．よって,

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$$

とすると，これが $\mathbb{C}^6$ の <u>$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間としての</u> 基底の 1 つとなる (一次独立性は各自確認せよ)．ここで，いま $\mathbb{C}^6$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考えているので，スカラー倍としては実数倍のみを考えるため，1 と i はスカラー倍では移りあわない値であることに注意しよう．よって,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^6 = |B| = 12$$

となり，$\mathbb{C}^6 \not\simeq \mathbb{R}^6$ である．一般に，同様の考察で

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$$

となることがわかるが，これは複素数全体 $\mathbb{C}$ が複素平面 ($\mathbb{R}$ 上 2 次元) で表されるという事実の一般化である．

(3)

$$\begin{aligned}\{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \right\}\end{aligned}$$

である．よって，

$$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

とすると，これが $\{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ の基底の 1 つとなる (一次独立性は各自確認せよ)．よって，

$$\dim_{\mathbb{R}}\{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} = |B| = 6$$

となり，$\{A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} \simeq \mathbb{R}^6$ である．ちなみに $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき，正の整数 n に対して，

$$W \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$$

とすると，これは $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ の部分空間で，同様の考察により，

$$\dim_{\mathbb{K}} W = \frac{n(n+1)}{2}$$

となることがわかる．

(4)

$$\begin{aligned}\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)\text{ は 6 次以下 }\} &= \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\right\}\end{aligned}$$

である．よって，

$$B = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\right\}$$

とすると，これが $\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)$ は 6 次以下 $\}$ の基底の 1 つとなる (一次独立性は各自確認せよ)．よって，

$$\dim_{\mathbb{R}}\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)\text{ は 6 次以下 }\} = |B| = 7$$

となり，$\{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(x)$ は 6 次以下 $\} \not\simeq \mathbb{R}^6$ である．ちなみに $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ としたとき，正の整数 n に対して，

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(x)\text{ は } n \text{ 次以下 }\}$$

とすると，これは $\mathbb{K}[x]$ の部分空間で，同様の考察により，

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq n} = n + 1$$

となることがわかる． □

問題 4

$\mathbb{R}$ 上の線形写像 $\varphi\colon \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{10}$ が $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\,\varphi = 4$ を満たすとする．このとき，φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ の次元 $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\,\varphi$ を求め，その値を半角数字で入力せよ．

問題 4 解答例. 8. □

問題 4 補足解説. 本問を解くのに必要な次元定理を思い出そう．

次元定理

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V を有限次元と仮定する．このとき，$\varphi\colon V \to W$ を線形写像とすると，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}\varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}\varphi.$$

次元定理より，本問において $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi$ は，

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\varphi = 12 - 4 = 8$$

と計算される．$\mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ の次元については問題 3 補足解説の (1) を参照のこと． □

問題 5

V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\varphi\colon V \to V$ を線形写像とする．このとき，φ が線形同型写像となるための必要十分条件であるものを以下から全て選択せよ．

(1) $\operatorname{Im}\varphi = V$.
(2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.
(3) $\varphi = \mathrm{id}_V$．ただし，id_V は恒等写像 $V \to V,\ v \mapsto v$.
(4) $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\varphi + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi$.

問題 5 解答例. (1), (2) □

問題 5 補足解説. (1)–(4) のそれぞれの条件が，φ が線形同型写像となるための必要十分条件であるかどうかを順に確認してみよう．ここでも問題 4 補足解説に述べた次元定理が非常に役に立つ．

(1) $\operatorname{Im}\varphi = V$ は φ が全射であるということに他ならないので，これは φ が線形同型写像となるための必要条件である．一方，次元定理より，$\operatorname{Im}\varphi = V$ であるとき，

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\varphi = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} V = 0$$

となる．次元が 0 のベクトル空間は $\{\mathbf{0}\}$ のみなので，上式より

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$$

であることがわかる．この等式は φ が単射であることと同値であったので，結局このとき φ の単射性も従い，φ が全単射，すなわち線形同型写像であることが導かれる．よって，(1) の条件は φ が線形同型写像となることの十分条件でもある．

(2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ は φ が単射であるということと同値であったので，これは φ が線形同型写像となるための必要条件である．一方，次元定理より，$\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\varphi = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}\{\mathbf{0}\} = \dim_{\mathbb{R}} V - 0 = \dim_{\mathbb{R}} V$$

となる．次元が $\dim_{\mathbb{R}} V$ となる V の部分空間は V のみなので，上式より

$$\operatorname{Im}\varphi = V$$

であることが導かれる．この等式は φ が全射であることを表すので，結局このとき φ の全射性も従い，φ が全単射，すなわち線形同型写像であることが導かれる．よって，(2) の条件は φ が線形同型写像となることの十分条件でもある．

(3) 恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V, \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ は全単射線形写像なので，$\varphi = \mathrm{id}_V$ であることは φ が線形同型写像であることの十分条件ではあるが，必要条件ではない．すなわち，$\varphi\colon V \to V$ が線形同型写像であるからといって，$\varphi = \mathrm{id}_V$ であるとは限らない．例えば，任意の n 次正則実行列 A に対して，

$$\varphi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$

は逆写像

$$\varphi_{A^{-1}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{v} \mapsto A^{-1}\boldsymbol{v}$$

を持つので線形同型写像である．

(4) (4) は次元定理の主張そのものなので，任意の線形写像 $\varphi\colon V \to V$ に対して成り立つ等式である (φ が全単射でなくても成り立つ)．よって，(4) は φ が線形同型写像であることを導かず，これは φ が線形同型写像となるための必要十分条件ではない． □

(1), (2) での考察より，以下の定理が成り立つことがわかる．これは定義域と終域の次元が等しいことがわかっている場合，線形写像が全単射であることを示すためには全射性か単射性のいずれかだけを示せば良いということを述べており，与えられた写像が線形同型写像であることを示す際に便利に使えることがある．

定理

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間で $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$ を満たすものとする．このとき，線形写像 $\varphi\colon V \to W$ に対し，以下の (1), (2), (3) は同値.

(1) φ は線形同型写像である．(すなわち，φ は全単射である．)
(2) φ は全射である．
(3) φ は単射である．

□