線形代数 II 第 13 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

U, V, W を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，

$$B_U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\},\ B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\},\ B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$$

をそれぞれ U, V, W の基底とする．$\varphi\colon U \to V, \psi\colon V \to W$ が線形写像であり，基底 B_U, B_V に関する φ の表現行列が

$$A(\varphi; B_U, B_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

基底 B_V, B_W に関する ψ の表現行列が

$$A(\psi; B_V, B_W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき，

$$(\psi \circ \varphi)(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \boxed{\text{ア}}\boldsymbol{w}_1 + \boxed{\text{イ}}\boldsymbol{w}_2$$

である．$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．(回答例：-10,11 (マイナスを表す-は半角のハイフン))

問題 1 解答例． $10, 18$. □

問題 1 補足解説． 本問を解くにあたってまず表現行列の定義を確認しておこう．

定義 (表現行列)

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．V と W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\varphi\colon V \to W$ を線形写像とする．$B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とすると，このとき，各 $j = 1, \dots, n$ に対して，

$$\varphi(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$$

を満たす a_{ij} $(i = 1, \dots, m)$ が定まる (B_W は W の基底なのでこれらの値は一意的に定まる)．このとき，(i, j) 成分が a_{ij} であるような行列を，

$$A(\varphi; B_V, B_W) \coloneqq (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$$

と書く．この $A(\varphi; B_V, B_W)$ を**基底 B_V, B_W に関する φ の表現行列**という．

線形写像の合成と表現行列の積は以下のように関連していた．

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

定理 (定理 13.2)

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．U, V, W を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\varphi\colon U \to V, \psi\colon V \to W$ を線形写像とする．B_U を U の基底，B_V を V の基底，B_W を W の基底とすると，

$$A(\psi \circ \varphi; B_U, B_W) = A(\psi; B_V, B_W)A(\varphi; B_U, B_V)$$

が成立する．とくに，線形写像 $\varphi\colon V \to V$ に対し，

$$A(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n\text{ 個}}; B_V, B_V) = A(\varphi; B_V, B_V)^n$$

である．

この定理を用いて本問を解いてみよう．基底 B_U, B_W に関する $\psi \circ \varphi$ の表現行列は，定理より，

$$A(\psi \circ \varphi; B_U, B_W) = A(\psi; B_V, B_W)A(\varphi; B_U, B_V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

このとき，表現行列の定義より，

$$(\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{u}_1) = 4\boldsymbol{w}_1 + 10\boldsymbol{w}_2, \qquad (\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{u}_2) = -2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2.$$

よって，$\psi \circ \varphi$ の線形性より，

$$(\psi \circ \varphi)(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = 2(\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{u}_1) - (\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{u}_2) = 2(4\boldsymbol{w}_1 + 10\boldsymbol{w}_2) - (-2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2) = 10\boldsymbol{w}_1 + 18\boldsymbol{w}_2.$$

□

なお，表現行列の定義より，$\varphi(\boldsymbol{u}_i)$ $(i = 1, 2)$，$\psi(\boldsymbol{v}_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ は全て与えられた基底の元の一次結合として書けるので，まず $\varphi(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)$ を B_V の元の一次結合で書いた後，それを ψ で送った先 $\psi(\varphi(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2))$ を計算しても良い． □

問題 2

線形写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y - 3z \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathbb{R}^3$ の基底

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と，$\mathbb{R}^2$ の基底

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する φ の表現行列は

$$A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{カ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{カ}}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．

問題 2 解答例． $A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. □

問題 2 補足解説. 問題 1 補足解説に述べた表現行列の定義に従って計算を行う．

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\qquad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\qquad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

となるので，あとはそれぞれの右辺を B' の元の一次結合で表示すれば良い．一般に，

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

となるとき，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+4b\\a-3b\end{pmatrix}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}&=-6\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}&=1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}&=-11\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので，

$$A(\varphi;B,B')=\begin{pmatrix}-6&1&-11\\5&0&9\end{pmatrix}$$

である． □

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般に V を $\mathbb{K}$ 上の n 次元ベクトル空間，B を V の基底としたとき，恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V\to V, v\mapsto v$ の基底 B に関する表現行列は

$$A(\mathrm{id}_V;B,B)=I_n$$

である (理由を考えよ)．よって，B' を V の別の基底としたとき，定理 13.2 より，

$$I_n=A(\mathrm{id}_V;B,B)=A(\mathrm{id}_V\circ\mathrm{id}_V;B,B)=A(\mathrm{id}_V;B',B)A(\mathrm{id}_V;B,B')$$

となる．よって，

$$A(\mathrm{id}_V;B,B')^{-1}=A(\mathrm{id}_V;B',B)$$

である．この事実を用いて，本問を以下のように解くこともできる：

$\mathbb{R}^2$ の基底として，$B_0=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ ($\boldsymbol{e}_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\boldsymbol{e}_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$) を考えると，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\quad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\quad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2.$$

となるので，

$$A(\varphi;B,B_0)=\begin{pmatrix}2&3&3\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$

である．一方，恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}$ について，

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\qquad\qquad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$$

であるので，

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};B',B_0)=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}$$

である．よって，

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};B_0,B')=A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};B',B_0)^{-1}=\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&4\\1&-3\end{pmatrix}.$$

以上より，定理 13.2 を用いて，

$$A(\varphi; B, B') = A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \varphi; B, B') = A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B_0, B')A(\varphi; B, B_0) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

となる． □

問題 3

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

を考える．このとき，基底 B, B' に関する恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ の表現行列は,

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B, B') = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．

問題 3 解答例. $A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B, B') = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. □

問題 3 補足解説. 問題 1 補足解説に述べた表現行列の定義に従って計算を行えば良い．

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，あとはそれぞれの右辺を B' の元の一次結合で表示すれば良い．一般に,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + 2b \\ 3a - b \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B, B') = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

である． □

問題 2 補足解説の後半に述べた手法により本問を以下のように解くこともできる：

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

である．よって,

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B, B') = A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; B', B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}^n$ の標準的な基底を

$$B_0 = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$$

と書く．また，

$$B = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$$

も $\mathbb{K}^n$ の基底であるとする．このとき，$\mathbb{K}^n$ の基底 B, B_0 に関する恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ の表現行列は

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}; B, B_0) = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

である．さらに，B と B_0 の順番を逆にすると，

$$A(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}; B_0, B) = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)^{-1}$$

である．証明は本問で行った計算を一般化すればわかるので，是非考えてみてもらいたい． □

問題 4

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 1} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(x) \text{ は 1 次以下 }\} = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

とおくと，これは

$$B = \{1, x\}$$

を基底の 1 つとして持つ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．また，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ は

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

を基底の 1 つとして持つ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．このとき，線形写像 $\varphi \colon \mathbb{C}[x]_{\leq 1} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を

$$a + bx \mapsto \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+2b & -3a \end{pmatrix}$$

で定めると基底 B, B' に関する φ の表現行列は

$$A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ク}}$に入る整数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ク}}$に入るのは整数なので 2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．

問題 4 解答例. $A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. □

問題 4 補足解説. 問題 1 補足解説に述べた表現行列の定義に従って計算を行えば良い．

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

である． □

問題 5

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(x) \text{ は 2 次以下 }\} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とおき，通常の方法で $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．線形写像

$$\varphi\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto f(x) + (1+2x)f'(x) + (1+x+x^2)f''(x)$$

の，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ のある基底 B に関する表現行列 $A(\varphi; B, B)$ が対角行列となるとき，その対角成分に現れる整数を半角数字でコンマで区切って**全て**入力せよ．ここで，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ の微分，$f''(x)$ は多項式 $f(x)$ の二階微分を表す．
φ の計算例： $(1+x+x^2)' = 1+2x$，$(1+x+x^2)'' = 2$ より，

$$\begin{aligned} \varphi(1+x+x^2) &= (1+x+x^2) + (1+2x)(1+2x) + (1+x+x^2) \cdot 2 \\ &= (1+x+x^2) + (1+4x+4x^2) + (2+2x+2x^2) \\ &= 4+7x+7x^2 \end{aligned}$$

問題 5 解答例． $1, 3, 7$． □

問題 5 補足解説． まず，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の標準的な基底として，

$$B_0 = \{1, x, x^2\}$$

をとる．このとき，

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = 1, \\ &\varphi(x) = x + (1+2x) = 1+3x, \\ &\varphi(x^2) = x^2 + (1+2x) \cdot 2x + (1+x+x^2) \cdot 2 = 2+4x+7x^2 \end{aligned}$$

となるので，

$$A(\varphi; B_0, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$\mathrm{id}\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ を恒等写像，B を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底とすると，

$$\begin{aligned} A(\varphi; B, B) &= A(\mathrm{id} \circ \varphi \circ \mathrm{id}; B, B) \\ &= A(\mathrm{id}; B_0, B) A(\varphi; B_0, B_0) A(\mathrm{id}; B, B_0) \\ &= A(\mathrm{id}; B, B_0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} A(\mathrm{id}; B, B_0) \end{aligned}$$

となる (2 つめの等式は定理 13.2 より，3 つめの等式については問題 2 補足解説参照)．よって，$A(\varphi; B, B)$ が対角行列となるとき，その対角行列は $A(\varphi; B_0, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ を対角化した結果の行列となる．ここで，

$A = A(\varphi; B_0, B_0)$ の固有多項式は,

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-3 & -4 \\ 0 & 0 & t-7 \end{pmatrix} \right| = (t-1)(t-3)(t-7)$$

となるので，A の固有値は $1, 3, 7$ (いずれも重複度 1) である．よって，A の対角化の結果 (の 1 つ) は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

である．よって，求める対角成分は $1, 3, 7$ である． □

ちなみに，A を対角化する行列を 1 つ求めると

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である．よって，解答例における計算より,

$$A(\mathrm{id}; B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

となっていれば,

$$A(\varphi; B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．表現行列の定義より,

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 + 2x, \quad f_3(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

とすれば，$B = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底で，$(*)$ を満たすことがわかる．よって,

$$\varphi(f_1(x)) = 1, \qquad \varphi(f_2(x)) = 3f_2(x), \qquad \varphi(f_3(x)) = 7f_3(x)$$

となる (確かめてみよ)．よって，φ という少し複雑な線形写像を計算する上では，B_0 という標準的な基底よりも，B という基底の方が計算しやすいということがわかる．例えば,

$$\varphi(3f_1(x) + 5f_2(x) - f_3(x)) = 3f_1(x) + 15f_2(x) - 7f_3(x)$$

というように計算ができる． □