線形代数 II 期末試験

(試験時間：75 分)

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの 7 問で 100 点満点である．これに加えて $\boxed{\text{Extra}}$ が 20 点分あるので，計 120 点となるが，100 点を超えた場合には切り捨てて 100 点を期末試験の点数とする．
- 答えのみで良い問題であっても，解答の手順が書いてあった場合，部分点を与える**可能性**がある．ただし，解答の過程を書く場合，最終的な答えがどれなのかを明確に記すようにすること．
- 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
- 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．

$\boxed{\text{記号}}$ $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．この試験では以下の記号を用いる．

- $\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \ a_i \in \mathbb{K}\ (i = 1, \dots, n) \right\}$.
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \ a_{ij} \in \mathbb{K}\ (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n) \right\}$.
- $\mathbb{K}[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, a_1 \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$.

なお，問題中ではこれらをいずれも通常の和とスカラー倍によって，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とみなす．

$\boxed{1}$ (各 10 点)

(1) 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, xy = 0 \right\}.$$

(2) 以下の $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$W = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \middle| \, A \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を固有ベクトルに持つ} \right\}.$$

$\boxed{2}$ (10 点) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ の以下の部分集合が一次独立かどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$\{1 + 2x, 1 + x - x^2, -1 + x + 3x^2\}$$

$\boxed{3}$ (各 5 点) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の以下の部分集合 B_1, B_2, B_3 がそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうかを判定せよ．**解答は「基底である」または「基底でない」のいずれかのみで良い．**

(1) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(2) $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(3) $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$

$\boxed{4}$ ((1) 5 点; (2) 8 点; (3) 7 点)

(1) $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，写像 $\varphi\colon V \to W$ が $\mathbb{K}$ 上の線形写像であるとは，φ がどのような性質を満たすことであるか，その定義条件を述べよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ が，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = 1 + x, \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1 + 3x^2$$

を満たすとき，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(3) a を実数の定数とし，線形写像

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2z \\ 2x + y + az \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，φ が<u>単射とならない</u>ような a の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

$\boxed{5}$ (10 点) 4×6 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^6$ の部分空間

$$W_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

の次元 $\dim_{\mathbb{R}} W_A$ を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

$\boxed{6}$ (各 5 点) 以下の (1)–(3) の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間が，それぞれ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として $\mathbb{C}^3$ と同型であるかどうかを判定せよ．**解答は「同型である」または「同型でない」のいずれかのみで良い．**

(1) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid {}^t A = A\}$．ここで，${}^t A$ は A の転置を表す.

(2) 対角化可能な 5 次正方行列 A の重複度 2 の固有値 λ に対応する固有空間 $V_A(\lambda)$.

(3) V, W を $\dim_{\mathbb{C}} V = 5, \dim_{\mathbb{C}} W = 4$ を満たす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，$\varphi\colon V \to W$ を $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,\varphi = 2$ を満たす線形写像としたときの φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\boxed{7}$ (10 点) 線形写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ -x + 5y - 3z \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathbb{R}^3$ の基底

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と，$\mathbb{R}^2$ の基底

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する φ の表現行列

$$A(\varphi; B, B')$$

を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

$\boxed{\text{Extra}}$ ((1) 20 点; (2) 20 点; (3) 20 点．ただし，Extra 全体で最大 20 点)

(1) $\mathbb{C}[x]$ の部分空間

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(x) \text{ は 2 次以下 }\} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

を考える．線形写像 $\varphi\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ を

$$f(x) \mapsto f(x) + (1+2x)f'(x) + (1+x+x^2)f''(x)$$

で定める．ただし，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ の微分，$f''(x)$ は多項式 $f(x)$ の二階微分を表す．このとき，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ 個}})(x^2)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．** また，φ は実は線形同型写像となる (このことは示さなくて良い)．このとき，

$$\varphi^{-1}(x^2)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(2) フィボナッチ型の漸化式を満たす数列全体のなす集合

$$F \coloneqq \{(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{C}, \text{任意の } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{に対し，} a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$$

を考える (例えば，$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in F$)．このとき，$F$ は以下の和とスカラー倍に関して $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる：

$$\begin{aligned} &(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots) \\ &c(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \dots) \end{aligned}$$

このとき，F の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての基底 B を 1 つ求めよ．**解答は答えのみで良い．**
また，写像

$$T\colon F \to F,\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \qquad \text{(数列を「手前 1 つにずらす」)}$$

を考えるとこれは線形写像である．このとき，上で自分が選んだ基底 B に関する T の表現行列

$$A(T; B, B)$$

を求めよ．

(3) 線形代数 II の講義を通して学んだ命題・定理の主張を書き，それを証明せよ．(命題・定理の主張の正確性，証明の正確性，選んだ命題・定理の難易度を考慮した上で点数を与える．)

問題は以上である．