線形代数 II 期末試験解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

記号

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．以下では次の記号を用いる．

- $\mathbb{K}^n \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_i \in \mathbb{K} \ (i = 1, \dots, n) \right\}$.
- $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{K} \ (i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n) \right\}$.
- $\mathbb{K}[x] \coloneqq \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, a_1 \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$.

なお，問題中ではこれらをいずれも通常の和とスカラー倍によって，$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とみなす．

問題 1

(1) 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \; xy = 0 \right\}.$$

(2) 以下の $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$W = \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \middle| \; A \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を固有ベクトルに持つ} \right\}.$$

問題 1 解答例．

(1) 部分空間でない．

理由：

$$w_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$w_1, w_2 \in W$．一方，

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W.$$

よって，W は和で閉じておらず，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．

(2) 部分空間である．

理由：まず，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$O \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

なので，O は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルに持つ．よって，$O \in W$ である．

次に，任意の 2 元 $A_1, A_2 \in W$ をとると，ある $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，

$$(A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\lambda_1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$A_1 + A_2$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルに持つ (対応する固有値は $\lambda_1 + \lambda_2$)．よって，$A_1 + A_2 \in W$．

さらに，任意の $A \in W$ に対し，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるが，このとき任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し，

$$(cA) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = cA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，cA もこのとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルに持ち (対応する固有値は $c\lambda$)，$cA \in W$ である．

以上より，W は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の部分空間である．□

問題 1 補足解説. 解法については第 9 回レポート課題解答例を参照のこと．なお，(1) の W はスカラー倍では閉じているので，解答では和で閉じないことを指摘することになる．□

問題 2

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ の以下の部分集合が一次独立かどうかを判定せよ．**ただし，判定の根拠も記載すること．**

$$\{1 + 2x, 1 + x - x^2, -1 + x + 3x^2\}$$

問題 2 解答例. 一次独立でない．

<u>理由：</u>ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$c_1(1 + 2x) + c_2(1 + x - x^2) + c_3(-1 + x + 3x^2) = 0 \tag{$*$}$$

となったと仮定する．上式を整理すると

$$(c_1 + c_2 - c_3) + (2c_1 + c_2 + c_3)x + (-c_2 + 3c_3)x^2 = 0$$

となる．ここで，c_1, c_2, c_3 に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の一般の解は，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \text{ は任意定数}$$

となる．これは，$(*)$ を満たす c_1, c_2, c_3 が $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にも存在することを示しているので，元の組 $\{1 + 2x, 1 + x - x^2, -1 + x + 3x^2\}$ は一次従属である．□

問題 2 補足解説. 解法については第 10 回レポート課題解答例問題 1, 2 補足解説を参照のこと． □

問題 3

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の以下の部分集合 B_1, B_2, B_3 がそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の基底であるかどうかを判定せよ．
解答は「基底である」または「基底でない」のいずれかのみで良い．

(1) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(2) $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(3) $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$.

問題 3 解答例.
(1) 基底である．
(2) 基底でない．
(3) 基底でない． □

問題 3 補足解説. 解法については第 10 回レポート課題解答例問題 4 補足解説を参照のこと．特に，5 ページの定理が有用である． □

問題 4

(1) $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，写像 $\varphi\colon V \to W$ が $\mathbb{K}$ 上の線形写像であるとは，φ がどのような性質を満たすことであるか，その定義条件を述べよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ が，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = 1 + x, \qquad \varphi\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 1 + 3x^2$$

を満たすとき，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(3) a を実数の定数とし，線形写像

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2z \\ 2x + y + az \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，φ が単射とならないような a の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

問題 4 解答例.

(1)

(L1) 任意の $v, v' \in V$ に対し，$\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')$.
(L2) 任意の $c \in \mathbb{K}, v \in V$ に対し，$\varphi(cv) = c\varphi(v)$.

(2) $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 9 + 4x + 15x^2$.

(3) $a = 3$. □

問題 4 補足解説. (2) の解法については第 11 回レポート課題解答例問題 3 補足解説を参照のこと．本問の場合,

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

である．

(3) の解法は以下の通りである：

φ は線形写像なので,

$$\varphi \text{ が単射} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$$

である (第 11 回レポート課題解答例問題 4 補足解説参照)．そこで，$\operatorname{Ker}\varphi \neq \{\mathbf{0}\}$，すなわち

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$$

を満たすような $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ が存在するための a の条件を求めれば良い．

$$\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2z \\ 2x+y+az \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\2&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

であるが，これを x, y, z に関する連立一次方程式と見たとき，これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つのは,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\2&1&a\end{pmatrix} < 3$$

のときである．$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\2&1&a\end{pmatrix}$ は行基本変形を用いて階段行列にすると,

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&a-3\end{pmatrix}$$

となるので，この階数が 3 より小さくなるのは $a - 3 = 0$，すなわち $a = 3$ のときとなる． □

問題 5

4×6 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix}1&1&2&0&2&-3\\0&1&0&4&2&0\\1&0&2&-4&0&-3\\2&1&4&-4&2&-6\end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^6$ の部分空間

$$W_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

の次元 $\dim_{\mathbb{R}} W_A$ を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

問題 5 解答例. $\dim_{\mathbb{R}} W_A = 4$. □

問題 5 補足解説. 解法については第 12 回レポート課題解答例問題 1 補足解説を参照のこと．本問の A を行基本変形を用いて簡約化した結果は,

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-4&0&-3\\0&1&0&4&2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

であり，$\mathrm{rank}\, A = 2$ である． □

問題 6

以下の (1)–(3) の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間が，それぞれ $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として $\mathbb{C}^3$ と同型であるかどうかを判定せよ．**解答は「同型である」または「同型でない」のいずれかのみで良い．**

(1) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = A\}$．ここで，${}^tA$ は A の転置を表す．

(2) 対角化可能な 5 次正方行列 A の重複度 2 の固有値 λ に対応する固有空間 $V_A(\lambda)$.

(3) V, W を $\dim_{\mathbb{C}} V = 5, \dim_{\mathbb{C}} W = 4$ を満たす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，$\varphi\colon V \to W$ を $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,\varphi = 2$ を満たす線形写像としたときの φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

問題 6 解答例.
(1) 同型である．
(2) 同型でない．
(3) 同型である． □

問題 6 補足解説. 解法については第 12 回レポート課題解答例問題 3 補足解説を参照のこと．本問は要するに与えられた $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の次元が 3 であるかどうかを判定する問題である (3 なら同型)．(1) については，第 12 回レポート課題解答例問題 3 補足解説 (3) を参照．(2) については，

$$\dim_{\mathbb{C}} V_A(\lambda) = 2$$

である (第 12 回レポート課題解答例問題 2 補足解説参照)．(3) については，次元定理より，

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim_{\mathbb{C}} V - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\,\varphi = 5 - 2 = 3$$

となる．次元定理については，第 12 回レポート課題解答例問題 4 補足解説参照． □

問題 7

線形写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ -x + 5y - 3z \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathbb{R}^3$ の基底

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と，$\mathbb{R}^2$ の基底

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する φ の表現行列

$$A(\varphi; B, B')$$

を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

問題 7 解答例. $A(\varphi; B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. □

問題 7 補足解説. 解法については第 13 回レポート課題解答例問題 2 補足解説を参照のこと． □

Extra 問題

(1) $\mathbb{C}[x]$ の部分空間

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(x) \text{ は 2 次以下 }\} = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

を考える．線形写像 $\varphi\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ を

$$f(x) \mapsto f(x) + (1 + 2x)f'(x) + (1 + x + x^2)f''(x)$$

で定める．ただし，$f'(x)$ は多項式 $f(x)$ の微分，$f''(x)$ は多項式 $f(x)$ の二階微分を表す．このとき，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ 個}})(x^2)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．** また，φ は実は線形同型写像となる (このことは示さなくて良い)．このとき，

$$\varphi^{-1}(x^2)$$

の値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(2) フィボナッチ型の漸化式を満たす数列全体のなす集合

$$F \coloneqq \{(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{C}, \text{任意の } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{に対し，} a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$$

を考える (例えば，$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \in F$)．このとき，$F$ は以下の和とスカラー倍に関して $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる：

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$
$$c(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \dots)$$

このとき，F の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての基底 B を 1 つ求めよ．**解答は答えのみで良い．**
また，写像

$$T\colon F \to F,\ (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \qquad \text{(数列を「手前 1 つにずらす」)}$$

を考えるとこれは線形写像である．このとき，上で自分が選んだ基底 B に関する T の表現行列

$$A(T; B, B)$$

を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(3) 線形代数 II の講義を通して学んだ命題・定理の主張を書き，それを証明せよ．(命題・定理の主張の正確性，証明の正確性，選んだ命題・定理の難易度を考慮した上で点数を与える．)

Extra 問題解答例．

(1)

$$(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ 個}})(x^2) = \frac{-3^n + 7^n}{2} + (-3^n + 7^n)x + 7^n x^2.$$
$$\varphi^{-1}(x^2) = -\frac{2}{21} - \frac{4}{21}x + \frac{1}{7}x^2.$$

(2)

基底 B の例：$B = \{A_0, A_1\}$．ただし，

- A_0 は $a_0 = 1, a_1 = 0$ となる数列 $A_0 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots)$，
- A_1 は $a_0 = 0, a_1 = 1$ となる数列 $A_1 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$.

基底 B に関する T の表現行列：$A(T; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Extra 問題補足解説.

(1) 本問については予想を付けて帰納法で示すという方法もあるかもしれないが，ここでは表現行列の対角化を用いる方法を解説する．

まず，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の標準的な基底として，

$$B_0 = \{1, x, x^2\}$$

をとる．このとき，

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = 1, \\ &\varphi(x) = x + (1+2x) = 1 + 3x, \\ &\varphi(x^2) = x^2 + (1+2x)\cdot 2x + (1+x+x^2)\cdot 2 = 2 + 4x + 7x^2 \end{aligned}$$

となるので，

$$A(\varphi; B_0, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} =: A$$

となる．ここで，A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-3 & -4 \\ 0 & 0 & t-7 \end{pmatrix} \right| = (t-1)(t-3)(t-7)$$

となるので，A の固有値は $1, 3, 7$ (いずれも重複度 1) である．ここで，A の固有値 $1, 3, 7$ に対する固有ベクトルとして，順に

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が取れる[*1]．よって，

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$\mathrm{id}\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ を恒等写像，

$$B = \{1, 1+2x, 1+2x+2x^2\}$$

とすると，

$$A(\mathrm{id}; B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P$$

[*1] 固有ベクトルを求める過程はここでは割愛する．例えば，第 4 回レポート課題解答例問題 1 補足解説参照.

となるので，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底 B に関する φ の表現行列は

$$
\begin{aligned}
A(\varphi; B, B) &= A(\mathrm{id} \circ \varphi \circ \mathrm{id}; B, B) \\
&= A(\mathrm{id}; B_0, B) A(\varphi; B_0, B_0) A(\mathrm{id}; B, B_0) \\
&= A(\mathrm{id}; B, B_0)^{-1} A(\varphi; B_0, B_0) A(\mathrm{id}; B, B_0) \\
&= P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる (第 13 回レポート課題解答例問題 5 補足解説参照)．よって，表現行列の定義より，

$$
f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 + 2x, \quad f_3(x) = 1 + 2x + 2x^2
$$

とすれば，$B = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底で，

$$
\varphi(f_1(x)) = 1, \qquad \varphi(f_2(x)) = 3f_2(x), \qquad \varphi(f_3(x)) = 7f_3(x)
$$

を満たすことがわかる．ここで，

$$
x^2 = -\frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2} f_3(x)
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
(\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n\text{ 個}})(x^2) &= (\underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n\text{ 個}}) \left(-\frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2} f_3(x) \right) \\
&= -\frac{3^n}{2} f_2(x) + \frac{7^n}{2} f_3(x) \\
&= \frac{-3^n + 7^n}{2} + (-3^n + 7^n)x + 7^n x^2
\end{aligned}
$$

となる．また，上の考察から，

$$
\varphi \left(-\frac{1}{6} f_2(x) + \frac{1}{14} f_3(x) \right) = -\frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2} f_3(x) = x^2
$$

となるので，

$$
\varphi^{-1}(x^2) = -\frac{1}{6} f_2(x) + \frac{1}{14} f_3(x) = -\frac{2}{21} - \frac{4}{21} x + \frac{1}{7} x^2
$$

となる． □

実はここでの考察から，$n \in \mathbb{Z}_{<0}$ のとき，

$$
\varphi^n = \begin{cases} \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n\text{ 個}} & n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{のとき}, \\ \mathrm{id} & n = 0 \text{ のとき}, \\ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \cdots \circ \varphi^{-1}}_{-n\text{ 個}} & n \in \mathbb{Z}_{<0} \text{のとき}, \end{cases}
$$

とすると，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\varphi^n(x^2) &= \frac{-3^n + 7^n}{2} + (-3^n + 7^n)x + 7^n x^2 \\
A(\varphi^n; B, B) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となることもわかる． □

(2) 解答例に書いた $B = \{A_0, A_1\}$ が F の基底であることは以下のように示される．

まず，ある $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$c_1 A_0 + c_2 A_1 = (0, 0, 0, \dots)$$

となったと仮定する (F における零元 $\mathbf{0}$ は $(0, 0, 0, \dots)$ であることに注意)．このとき，

$$(c_1, c_2, c_1 + c_2, c_1 + 2c_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$$

となるので，$c_1 = c_2 = 0$ である．よって，B は一次独立である．次に，任意の $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in F$ に対して，

$$A - a_0 A_0 - a_1 A_1 \in F$$

という数列を考えると，これは第 0 項と第 1 項がいずれも 0 なので，F の元であることも考慮すると，

$$A - a_0 A_0 - a_1 A_1 = (0, 0, 0, \dots) = \mathbf{0}$$

となることがわかる．よって，

$$A = a_0 A_0 + a_1 A_1 \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}} B$$

である．これより，$F \subset \operatorname{span}_{\mathbb{C}} B$．一方，$\operatorname{span}_{\mathbb{C}} B \subset F$ は自明なので，これより $F = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} B$ がわかる．以上より，B は確かに F の基底である．

基底 B に関する T の表現行列 $A(T; B, B)$ については，

$$T(A_0) = (0, 1, 1, 2, 3, \dots) = A_1, \qquad T(A_1) = (1, 1, 2, 3, 5 \dots) = A_0 + A_1$$

と計算されることより，表現行列の定義から

$$A(T; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と求まる． □

ちなみに，この内容はフィボナッチ数列の一般項を求める話と関連している．$A \coloneqq A(T; B, B)$ とし，A^n を計算してみる．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} \right| = t^2 - t - 1$$

となるので，A の固有値は

$$\alpha \coloneqq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \beta \coloneqq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(いずれも重複度 1) である．ここで，A の固有値 α, β に対する固有ベクトルとして，順に

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れる[*2]．これより，

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

[*2] 固有ベクトルを求める過程はここでは割愛する．

となる．よって，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n\text{ 個}}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
A(T^n; B, B) &= A(T; B, B)^n \\
&= A^n \\
&= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}. \qquad (\alpha\beta = -1 \text{ に注意})
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
T^n(A_0) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})A_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)A_1 \\
T^n(A_1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)A_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})A_1
\end{aligned}
$$

である．これより，$A = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \in F$ とすると，

$$
\begin{aligned}
T^n(A) &= T^n(a_0A_0 + a_1A_1) \\
&= a_0T^n(A_0) + a_1T^n(A_1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + a_1(\alpha^n - \beta^n)\right) A_0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a_0(\alpha^n - \beta^n) + a_1(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})\right) A_1
\end{aligned}
$$

である．一方，T の定義より，

$$
T^n(A) = (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots) = a_nA_0 + a_{n+1}A_1
$$

である．以上の 2 つの式を比較して，

$$
a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(a_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + a_1(\alpha^n - \beta^n)\right)
$$

であることがわかる．これが $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を満たす数列 $\{a_n\}_n$ の一般項である．

ここで，上の表現行列の n 乗を求める際に出てきた固有多項式

$$
t^2 - t - 1
$$

は二項間漸化式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ の特性方程式であることに注意しよう．実はこのような対応は一般の定数係数斉次線形漸化式

$$
a_{n+k} = c_0a_n + c_1a_{n+1} + \cdots + c_{k-1}a_{n+k-1} \ (c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{K})
$$

で同様の話を考えても見られる．興味のある方は是非考えてみてもらいたい． □