線形代数 II 中間試験

(試験時間：75 分)

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ までの 4 問で 100 点満点である．これに加えて $\boxed{\text{Extra}}$ が 20 点分あるので，計 120 点となるが，100 点を超えた場合には切り捨てて 100 点を中間試験の点数とする．
- 答えのみで良い問題であっても，解答の手順が書いてあった場合，部分点を与える**可能性**がある．ただし，解答の過程を書く場合，最終的な答えがどれなのかを明確に記すようにすること．
- 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
- 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．

$\boxed{1}$ (各 15 点) 以下の行列 A, B について固有多項式，固有値，対角化の結果を求めよ．ただし，対角化は結果だけ求めれば良く，それぞれの行列を対角化する正則行列は求めなくても良い．**解答は答えのみで良い．**

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 19 & -7 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ (各 10 点) 以下の行列 A, B, C, D がそれぞれ対角化可能であるかどうかを判定せよ．(対角化可能であっても実際に対角化する必要はない．) **判定の根拠も記載すること．** また，それぞれの行列の固有多項式はヒントとして記載しているが，用いなくても良い．

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 10 \\ -12 & -20 & -18 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4$$

$$(2)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_B(t) = t^3 - 6t^2$$

$$(3)\ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_C(t) = (t-1)^3(t+1)^2$$

$$(4)\ D = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 & 1+i \\ -i & 2 & i & 0 \\ -1 & -i & 2 & -3 \\ 1-i & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_D(t) = t^4 - 8t^3 + 10t^2 + 16t - 19$$

$\boxed{3}$ (10 点) $\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} -1 \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

ととる．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，**ベクトルの順番は並べ替えずに** $\boldsymbol{v}_i$ **を** i 番目のベクトルと考えて，講義内で説明したアルゴリズムに従って，グラム・シュミットの直交化を行うこと．**解答は答えのみで良い．**

$\boxed{4}$ (20 点)　エルミート行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & i \\ -1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化するユニタリ行列 U を 1 つ求め，その U による対角化の結果 $U^{-1}AU$ を求めよ．**解答は答え (U と $U^{-1}AU$) のみで良い．**

※ 本問に関しては以下の部分点を与える：

- 対角化の結果得られる対角行列 ($U^{-1}AU$ の結果のみ) を求めた $\cdots$ 7 点
- ユニタリ行列ではないが A を対角化する正則行列 P とそれによる対角化の結果 $P^{-1}AP$ を求められた $\cdots$ 15 点

$\boxed{\text{Extra}}$ (20 点)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

に対し，A^n $(n \in \mathbb{Z})$ を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$A^3 = \boxed{\text{ア}} A^2 + \boxed{\text{イ}} A + \boxed{\text{ウ}} I_3$$

である．$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に入る値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(3) 講義内で証明を省略した以下の命題についていずれか 1 つを選んで証明せよ．(両方解答を記載した場合，点数の高い方を本問の得点とする．)

ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant)

任意の正の整数 n に対し，

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

定理 4.5

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を $\mathbb{C}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき，$k < n$ であれば，ある $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{C}^n$ が存在して，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の n 個の一次独立な元となるようにできる．

問題は以上である．