線形代数 II 中間試験解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列 A, B について固有多項式，固有値，対角化の結果を求めよ．ただし，対角化は結果だけ求めれば良く，それぞれの行列を対角化する正則行列は求めなくても良い．**解答は答えのみで良い．**

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 19 & -7\end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

問題 1 解答例.

<u>(1)</u>

行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$：$\Phi_A(t)=t^2-t+1$.

行列 A の固有値：$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

行列 A の対角化の結果：$\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$. (対角成分の並べ方は任意)

<u>(2)</u>

行列 B の固有多項式 $\Phi_B(t)$：$\Phi_B(t)=t^3-3t-2$.

行列 B の固有値：$2, -1$.

行列 B の対角化の結果：$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. (対角成分の並べ方は任意)

□

問題 1 補足解説. 解法については第 2, 3 回レポート課題解答例を参照のこと． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2

以下の行列 A, B, C, D がそれぞれ対角化可能であるかどうかを判定せよ．(対角化可能であっても実際に対角化する必要はない．) **判定の根拠も記載すること．** また，それぞれの行列の固有多項式はヒントとして記載しているが，用いなくても良い．

(1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 10 \\ -12 & -20 & -18 \end{pmatrix}$, $\Phi_A(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_B(t) = t^3 - 6t^2$

(3) $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\Phi_C(t) = (t-1)^3(t+1)^2$

(4) $D = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 & 1+i \\ -i & 2 & i & 0 \\ -1 & -i & 2 & -3 \\ 1-i & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_D(t) = t^4 - 8t^3 + 10t^2 + 16t - 19$

問題 2 解答例.

(1) 対角化可能である．

理由： A の固有多項式は $\Phi_A(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-2)(t-1)(t+2)$ となるので，3 次正方行列 A は相異なる 3 個の固有値 $2, 1, -2$ を持つから．

(2) 対角化可能である．

理由： B の固有多項式は $\Phi_B(t) = t^3 - 6t^2 = t^2(t-6)$ となるので，3 次正方行列 B の固有値は 0(重複度 2), 6(重複度 1) である．ここで，

$$0I_3 - B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$3 - \mathrm{rank}(0I_3 - B) = 3 - 1 = 2 (= \text{固有値 } 0 \text{ の重複度})$$

となる．B の重複度 2 以上の固有値は 0 のみなので，これより B は対角化可能である．

理由 (別解)： B は実対称行列であるから．

(3) 対角化不可能である．

理由： C の固有多項式は $\Phi_C(t) = (t-1)^3(t+1)^2$ となるので，5 次正方行列 C の固有値は 1(重複度 3), -1(

重複度 2) である．ここで，

$$
-I_5 - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ -7 & -2 & -4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

は行基本変形を用いて簡約化すると，

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となるので，

$$
5 - \mathrm{rank}(-I_5 - C) = 5 - 4 = 1 (< \text{固有値} -1 \text{の重複度})
$$

となる．よって，C は対角化不可能である．

(4) 対角化可能である．

理由： D はエルミート行列であるから．

□

問題 2 補足解説. (1) の理由については，「全ての固有値の重複度が 1 であるので」という書き方でも良い．また，エルミート行列はユニタリ行列を用いて必ず対角化可能であったということを思い出そう．

(1), (2), (3) の解法については，第 3 回レポート課題解答例を参照のこと． □

問題 3

$\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を

$$
\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}
$$

ととる．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^3$ の元の組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，**ベクトルの順番は並べ替えずに** $\boldsymbol{v}_i$ を i 番目のベクトルと考えて，講義内で説明したアルゴリズムに従って，グラム・シュミットの直交化を行うこと．**解答は答えのみで良い．**

問題 3 解答例.

$$
\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

□

問題 3 補足解説. 解法については第 6 回レポート課題解答例を参照のこと．なお，本問ではベクトルの順番を指定することでグラム・シュミットの直交化法の手順を指定しているので，解答例以外の別解はない． □

問題 4

エルミート行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 2 & i \\ -1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化するユニタリ行列 U を 1 つ求め，その U による対角化の結果 $U^{-1}AU$ を求めよ．**解答は答え (U と $U^{-1}AU$) のみで良い．**

問題 4 解答例.

$$A \text{ を対角化するユニタリ行列：} U = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{対角化の結果：} U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

問題 4 補足解説. 本問については，U の取り方は 1 通りではないので，個別に採点を行う．例えば，U の第 1 列，第 2 列は

$$c_1 \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

という形をしているベクトルで，大きさが 1 で互いに直交する 2 つのベクトルの組であれば何でも良い．(取り方は無限に存在する．)

解法については第 7 回レポート課題解答例を参照のこと． □

Extra 問題

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

に対し，A^n $(n \in \mathbb{Z})$ を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$A^3 = \boxed{ア}A^2 + \boxed{イ}A + \boxed{ウ}I_3$$

である．$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$に入る値を求めよ．**解答は答えのみで良い．**

(3) 講義内で証明を省略した以下の命題についていずれか 1 つを選んで証明せよ．(両方解答を記載した場合，点数の高い方を本問の得点とする．)

ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant)

任意の正の整数 n に対し，

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

定理 4.5

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を $\mathbb{C}^n$ の一次独立な元の組とする．このとき，$k < n$ であれば，ある $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{C}^n$ が存在して，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の n 個の一次独立な元となるようにできる．

Extra 問題.

(1) $A^n = \begin{pmatrix} 3-2^{1+n} & 0 & -3+3\cdot 2^n \\ 1-2^n & 2^n & -1+2^n \\ 2-2^{1+n} & 0 & -2+3\cdot 2^n \end{pmatrix}$.

(2) $A^3 = 6A^2 - 10A + 4I_3$.

(3：ファンデルモンド行列式の公式の証明)

左辺は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての多項式であるが，$1 \leq i < j \leq n$ に対し，$x_i = x_j$ とすると，考えている行列内に同じ行が 2 つ現れることになるので，行列式の交代性からこのとき恒等的に 0 となる．よって因数定理より，左辺の多項式は $(x_j - x_i)$ で割り切れることがわかる．これより，ある多項式 $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を用いて，

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

と書けることがわかる．

一方，行列式を考えている行列の (i,j) 成分が x_i^{j-1} であることに注意すると，行列式の一般的な明示式より，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)}^0 x_{\sigma(2)}^1 x_{\sigma(3)}^2 \cdots x_{\sigma(n)}^{n-1}$$

となる．ただし，S_n は n 文字の置換全体の集合，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号である．これより，この多項式は全ての項が $0+1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$ 次である多項式であり，σ が恒等置換 e (i を i に写す置換) である項を考えると，$x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる ($\mathrm{sgn}(e)=1$ に注意).

いま，$1\leq i<j\leq n$ を満たす (i,j) は全部で ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 通りあるので，$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$ は全ての項が $n(n-1)/2$ 次である多項式であり，さらに $x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ という項を係数 1 で含むことがわかる．これらの比較により，$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$ が導かれる．よって，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i).$$

(3：定理 4.5 の証明)

定理 4.5 を示すためには,

($*$) $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ が一次独立で $k<n$ であるとき，ある $j\in\{1,\ldots,n\}$ が存在して，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{e}_j$ が一次独立となる

ことを示せば十分である．($k+1<n$ の時は，$\boldsymbol{v}_{k+1}=\boldsymbol{e}_j$ とおいて，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_{k+1}$ に対して ($*$) を適用するということを繰り返せば良い．)

以下，($*$) を背理法で示す．背理法の仮定より，各 $j=1,\ldots,n$ に対し，$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{e}_j$ は一次従属となる．よって，ある $\widetilde{c}_{1,j},\ldots,\widetilde{c}_{k,j},a_j\in\mathbb{K}$ が存在して，

$$\widetilde{c}_{1,j}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\widetilde{c}_{k,j}\boldsymbol{v}_k+a_j\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{0} \tag{$\star1$}$$

かつ $(\widetilde{c}_{1,j},\ldots,\widetilde{c}_{k,j},a_j)\neq(0,\ldots,0)$ となる．このとき，$a_j\neq 0$ である．なぜなら，もし $a_j=0$ であったとすると，$(\widetilde{c}_{1,j},\ldots,\widetilde{c}_{k,j})\neq(0,\ldots,0)$ かつ,

$$\widetilde{c}_{1,j}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\widetilde{c}_{k,j}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}$$

を満たすので $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ が一次独立であるという仮定に矛盾するためである．これより $c_{i,j}\coloneqq -\widetilde{c}_{i,j}/a_j$ とおくと，($\star1$) において $a_j\boldsymbol{e}_j$ を移項した後，両辺を $-1/a_j$ 倍して,

$$c_{1,j}\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_{k,j}\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{e}_j$$

となる．この式は

$$(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_k)\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{k,j}\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_j \tag{$\star2$}$$

と同値である．ここで，$c_{i,j}$ を (i,j) 成分とする $k\times n$ 行列 $C=(c_{i,j})_{i=1,\ldots,k,j=1,\ldots,n}$ を考えると，($\star2$) は

$$(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_k)C=(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n)=I_n \tag{$\star3$}$$

というようにまとめられる．ここで，n 個の未知数 $x_1,\ldots,x_n$ に関する連立一次方程式

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{$\star4$}$$

を考える．このとき，両辺に左から $n \times k$ 行列 $(\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_k)$ を掛けることで,

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \ &\Rightarrow (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_k)C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_k)\mathbf{0} \\ &\Rightarrow I_n\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad ((\star 3) \text{ より}) \\ &\Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \end{aligned}$$

となる．これより，連立一次方程式 $(\star 4)$ の解の自由度は 0 なので，いま $n - \operatorname{rank} C = 0$，つまり，$\operatorname{rank} C = n$ であることがわかる．一方，$k < n$ なので C の行の数 k は n より小さく，このとき $\operatorname{rank} C = n$ とはなりえない．これは矛盾であるので，背理法から $(*)$ が示された． □

Extra 問題補足解説.

(1) 解法については第 4 回レポート課題解答例を参照のこと．なお，問題の A に対しては,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

(2) 直接計算でも求められるが，ケイリー・ハミルトンの定理を用いると良い．ケイリー・ハミルトンの定理を用いた解法については第 5 回レポート課題解答例を参照のこと．

(3-1) ファンデルモンド行列式の公式の右辺の $\prod_{1 \leq i < j \leq n}$ という記号は,『条件 $1 \leq i < j \leq n$ を満たすような全ての自然数 i と j に関して積をとる』という意味である．和に関する $\sum$ という記号の積バージョンであると考えれば良い[*1]．例えば $n = 3$ のとき，この公式は

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

となる．ファンデルモンド行列式の公式の右辺の積は**差積**とも呼ばれる．特に，この行列式の値が 0 でないことの必要十分条件が

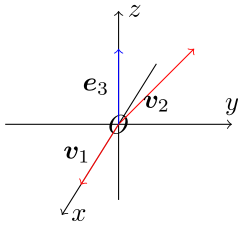
$$\text{任意の相異なる } i, j \text{ について } x_i \neq x_j$$

であることに注意する．

(3-2) 定理 4.5 について，記号ではわかりにくい部分があるかもしれないので，例として $\mathbb{R}^3$ の場合の状況を図示しておこう (定理は $\mathbb{C}^n$ で述べたが $\mathbb{R}^n$ においても全く同じように証明される)．一次独立な元の組 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が "足りない方向" となっており，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が

[*1] $\sum$ は総和を意味する sum, summation の頭文字 s に由来しており，$\prod$ は積を意味する product の頭文字 p に由来している．$\prod$ はパイ π の大文字である．

$\mathbb{R}^3$ の一次独立な元の組となる．



このように “足りない方向” の元をどんどん追加することで，より大きな一次独立な元の組を作っていける．そして “次元” に一致する数の一次独立な元が得られたところで “足りない方向” が無くなって元の追加が終了するという流れである． $\square$